FOLIA 196

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VII (2015)

ISSN 2080-9751

Damian Wiśniewski

Wokół liczb i szeregów harmonicznych*

Abstract. The harmonic series is one of the most celebrated infinite series of mathematics. From a pedagogical point of view, the harmonic series provides a wealth of opportunities. Applications such as *Gabriel's wedding cake* and Euler's proof of the divergence of prime numbers can lead to some very nice discussions. The main idea of this article is to survey some of unusual, insightful and inspiring divergence proofs. First of all, this article is addressed at first-year calculus students.

1. Wstęp

Liczbę $\mathcal{H}_n^{(s)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ nazywamy n-tą *liczbą harmoniczną rzędu* s, zaś szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *szeregiem harmonicznym rzędu* s, $s \in \mathbb{R}$. Termin *harmoniczny* wywodzi się z tego, że każdy wyraz ciągu o przepisie $a_n = \frac{1}{n}$, począwszy od drugiego, jest średnią harmoniczną wyrazów sąsiednich, to znaczy

$$a_k = \frac{2}{\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}}}, \text{ dla } k \geq 2.$$

W dalszej części artykułu terminy: *liczby harmoniczne* i *szereg harmoniczny* oznaczać będą liczby harmoniczne i szereg harmoniczny rzędu pierwszego. Będziemy pisać $\mathcal{H}_n$ zamiast $\mathcal{H}_n^{(1)}$.

Jako pierwszy własności liczb harmonicznych badał Nicholas Oresme. W 1350 roku udowodnił, że szereg harmoniczny jest rozbieżny. Co więcej, pokazał, iż sumy częściowe tego szeregu spełniają nierówność $\mathcal{H}_{2^k} > \frac{k+1}{2}$, dla $k = 1, 2, \ldots$

Ponad czterysta lat później oszacowaniami liczb harmonicznych zajmował się Leonhard Euler (Euler, 1734); w XIX, XX i XXI wieku to zagadnienie było badane między innymi w (Cesaro, 1885), (Lodge, 1904), (Toth, Mare, 1991), (DeTemple, Wang, 1991), (Chen, Qi, 2008) oraz (Villarino, 2004, 2007).

*Around harmonic numbers and harmonic series

2010 Mathematical Subject Classification: Primary: 97A80, 97B40, 97I30

Key words and phrases: harmonic numbers, harmonic series, divergence

Liczby harmoniczne są powszechne w nauce: w fizyce - oporność zastępcza układu oporników połączonych równolegle jest równa średniej harmonicznej poszczególnych oporności, w informatyce - w analizie algorytmów, w muzyce - przy zależnościach między tonem podstawowym a długością struny wyjściowej.

Liczby harmoniczne występują w statystykach dotyczących zjawisk pogodowych. Analizując zapisy meteorologiczne w Chicago, Kifowit i Stamps (Kifowit, Stamps, 2006) zauważyli zależność między rokiem, który przyniósł rekorodowe opady śniegu, a wartościami kolejnych liczb harmonicznych; generalnie po n latach obserwacji odnotowywano około $\mathcal{H}_n$ rekordowych lat.

Zadziwiająca jest sztuczka karciana oparta na pomyśle R.T. Sharpa (Sharp, 1954), która pokazuje, jak w naturalny sposób liczby harmoniczne pojawiają się w prostych sytuacjach.Przypuśćmy, że chcemy ułożyć na stole stos kart tak, aby nawis utworzony przez karty wystające poza krawędź stołu był maksymalny. Jeśli mamy k kart, d_{k+1} oznacza odległość krawędzi wierzchniej karty od krawędzi stołu, to otrzymujemy zależność $d_{k+1} = \mathcal{H}_k$ (więcej szczegółów w (Patashnik, Graham, Knuth, 2001)).

W kolejnych rozdziałach przytoczymy wybrane, różnorodne, dowody rozbieżności szeregu harmonicznego, pokażemy zastosowanie liczb harmonicznych w dowodzie twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych oraz wyprowadzimy podstawowe oszacowania liczb harmonicznych.

Artykuł jest adresowany przede wszystkim do studentów pierwszego roku matematyki, może stanowić przykład ciekawego wykładu w ramach kursu analizy matematycznej przy omawianiu pojęcia szeregów liczbowych i ich zbieżności. Uczniowie, którzy ukończyli szkołę średnią na profilu rozszerzonym z matematyki wiedzą, że suma nieskończonej ilości dodatnich składników może być skończona (na przykładzie sumy składników nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie q, w przypadku $|q| < 1$). Z doświadczenia autora, podpartego rozmowami ze studentami pierwszego roku matematyki, wynika, że intuicja zawodzi ich w przypadku obliczenia sumy odwrotności wszystkich liczb naturalnych. Podawane są różne skończone wyniki, prawidłowa odpowiedź jest rzadkością. Główą ideą artykułu jest przedstawienie wybranych dowodów rozbieżności szeregu harmonicznego, wzbogaconych interpretacją geometryczną. Dowody te pokazują piękno i różnorodność matematyki na przystępnym poziomie.

2. Zbieżność szeregu harmonicznego

Fakt 1
Szereg harmoniczny jest szeregiem rozbieżnym.

Powyższe stwierdzenie zostało udowodnione na kilkadziesiąt (Kifowit, Stamps, 2006a) sposobów. Najpierw przytoczymy dwa z nich, najczęściej cytowane w podręcznikach analizy matematycznej (patrz (Fichtenholz, 1995), (Kaczyński, 2005)).

Dowód 1. (Nichola Oresme, 1350).
Zachodzi oczywista nierówność

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Jeżeli po odrzuceniu dwóch pierwszych wyrazów, pozostałe wyrazy szeregu harmonicznego rozbijemy na grupy po $2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ wyrazów w każdej:

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2},\ \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{2^2},\ \underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{2^3},\ldots,\ \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}},\ldots,$$

to każda z tych sum z osobna będzie większa od $\frac{1}{2}$. Faktycznie,

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2} \quad \text{dla } k \geq 2.$$

Stąd

$$\mathcal{H}_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Sumy częściowe nie są ograniczone z góry, więc szereg jest rozbieżny (analogicznie można pokazać, że $\mathcal{H}_{M^k} > k \cdot \frac{M-1}{M}$). □

Dowód 2. Skorzystamy ze znanych nierówności $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$ dla $t > -1$. Podstawiając w nich $t = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, otrzymamy

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Sumując powyższe nierówności dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Oznaczając teraz n-tą sumę częściową szeregu harmonicznego przez s_n, otrzymujemy

$$s_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq s_n.$$

Z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$ wynika, szereg harmoniczny jest rozbieżny. □
W innej wersji powyższego dowodu korzysta się z kryterium ilorazowego dla szeregu harmonicznego i szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Dowód 3. (Pietro Mengoli, połowa XVII wieku) Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2}{n}, \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots$$

Przypuśćmy, że szereg harmoniczny jest zbieżny do S. Wtedy:

$$\begin{aligned} S &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\ldots \\ &> 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots = 1+S. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. $\square$

Dowód 4. (Jacob Bernoulli, 1689) Zauważmy, że jeśli $c \in \mathbb{N}$, $c > 1$, to

$$\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \cdots + \frac{1}{c^2} \geq (c^2 - c)\frac{1}{c^2} = 1 - \frac{1}{c}.$$

Zatem $\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \cdots + \frac{1}{c^2} \geq 1$. Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{25}\right) + \left(\frac{1}{26} + \cdots + \frac{1}{676}\right) + \ldots$$
$$\geq 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \qquad \square$$

Dowód 5. Przypuśćmy, że szereg harmoniczny jest zbieżny do S. Wtedy $S > 2$, ponieważ $\mathcal{H}_4 = \frac{25}{12}$. Zauważmy, że

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{10}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \cdots > 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{10} + \frac{5}{15} + \ldots$$
$$= \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \cdots = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = 2(S-1).$$

Stąd $S < 2$, co jest sprzeczne z naszym wyjściowym spostrzeżeniem. $\square$

Kolejny dowód wiąże liczby harmoniczne z liczbami Fibonacciego (Kifowit, Stamps, 2006b), (Chen, Kennedy, 2012).

Dowód 6. Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb naturalnych określany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Kolejne wyrazy tego ciągu nazywane są *liczbami Fibonacciego*. Skorzystamy ze znanego faktu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{f_n}{f_{n+1}}\right) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \neq 0. \quad (1)$$

Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}.$$

Z (1) wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}$ jest rozbieżny, co pociąga za sobą rozbieżność szeregu harmonicznego. □

Przytoczymy jeszcze jeden z nowszych dowodów (patrz Sinha, 2013):

Dowód 7. Zauważmy, że

$$\mathcal{H}_{k+m} = \mathcal{H}_k + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+m} > \mathcal{H}_k + \frac{m}{k+m}.$$

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k mamy $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{m}{k+m} = 1$. Ustalając $\varepsilon \in (0,1)$ dostajemy, że dla każdego k istnieje m takie, że $\mathcal{H}_{k+m} > \mathcal{H}_k + \varepsilon$. Stąd ciąg $(\mathcal{H}_n)$ nie jest ograniczony z góry, szereg harmoniczny jest rozbieżny. □

Pomimo tego, że szereg harmoniczny jest rozbieżny, liczby harmoniczne rosną „wyjątkowo wolno”. Dla przykładu $\mathcal{H}_8 = 2\frac{201}{280}$, $\mathcal{H}_{20} \approx 3,6$, zaś $\mathcal{H}_{13000}$ ledwie przekracza 10.
W obliczu tych faktów zaskakujące może się wydawać, że

Lemat 1
Liczba harmoniczna jest liczbą naturalną tylko dla $n = 1$.

Dowód. Oczywiście $\mathcal{H}_1 = 1 \in \mathbb{N}$. Rozważmy $\mathcal{H}_n$ dla $n > 1$ i wybierzmy k takie, że $2^k \leq n < 2^{k+1}$. W ten sposób mamy

$$\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Niech teraz M będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich mianowników różnych od 2^k:

$$M = NWW(1, 2, 3, \ldots, 2^k - 1, 2^k + 1, \ldots, n).$$

Stąd 2^{k-1} jest dzielnikiem M, zaś 2^k nim nie jest. Mnożąc $\mathcal{H}_n$ przez M otrzymamy

$$M \cdot \mathcal{H}_n = M + \frac{M}{2} + \frac{M}{3} + \cdots + \frac{M}{2^k} + \cdots + \frac{M}{n} = t + \frac{M}{2^k}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{N}.$$

Z określenia M wynika, że $\frac{M}{2^k} \notin \mathbb{N}$. Stąd $M \cdot \mathcal{H}_n \notin \mathbb{N}$, więc również $\mathcal{H}_n \notin \mathbb{N}$ dla $n > 1$.

Przytoczymy teraz twierdzenie o zbieżności szeregu harmonicznego rzędu s. Z wniosku z tego twierdzenia skorzystamy w dalszej części artykułu.

Fakt 2
Szereg harmoniczny rzędu s jest zbieżny dla $s > 1$ i rozbieżny dla $s \leq 1$.

Dowód. Rozważmy trzy przypadki:

1. Niech $s = 1$. Otrzymujemy szereg harmoniczny, więc rozbieżny.

2. Niech $s < 1$. Z kryterium porównawczego mamy

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad s < 1 \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

zatem szereg harmoniczny rzędu $s < 1$ jest rozbieżny.

3. Niech $s > 1$. Łącząc wyrazy szeregu harmonicznego rzędu s w grupy, tak jak poniżej, otrzymamy sumy

$$\underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{2^2}, \quad \ldots, \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}}, \ldots \tag{2}$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n)^s} < n\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Z powyższych zależności widać, że kolejne sumy w (2) są mniejsze od kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego o przepisie $a_n = \frac{1}{(2^{s-1})^n}$. Zatem każda suma częściowa rozpatrywanego szeregu jest mniejsza od liczby

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^{s-1}}}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}},$$

więc szereg harmoniczny rzędu $s > 1$ jest zbieżny.

Wniosek 1

Ciąg $\left(H_n^{(s)}\right)$ *liczb harmonicznych rzędu* $s > 1$ *ma granicę. Nazywamy ją dzetą Riemanna i zapisujemy :*

$$\zeta(s) := \mathcal{H}_{\infty}^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Powyższy wniosek wykorzystamy przy dowodzie Lematu 3.

Aby pobudzić wyobraźnię studentów odnośnie do rozbieżności szeregu harmonicznego, warto im przedstawić interpretację geometryczną szeregu harmonicznego, noszącą nazwę *Gabriel's wedding cake* (Fleron, 1999).

Określmy funkcję f następująco: $f(x) = \frac{1}{[x]}$ dla $x \in [1, \infty)$, gdzie symbolem $[x]$ oznaczono cechę liczby x. Obracając wykres funkcji f wokół osi OX, otrzymamy figurę przedstawioną na Ryc. 1.

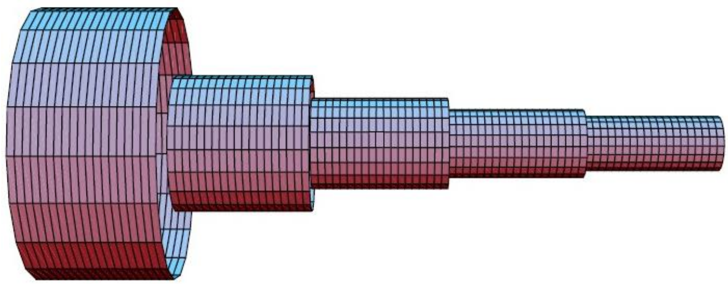
Składa się ona z nieskończonej ilości otwartych walców o wysokościach długości 1 i promieniach, kolejno, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Zatem

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Na mocy Wniosku 1 wiemy, że suma szeregu jest zbieżna do liczby $\zeta(2)$, czyli $\frac{\pi^2}{6}$ (Dunham, 1990). Stąd $V = \frac{\pi^3}{6}$. Z drugiej strony, jeśli policzymy pole powierzchni bocznej rozważanej bryły, dostaniemy

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{n} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Okazuje się więc, paradoksalnie, że rozważany tort „możemy zjeść, ale nie zamrozić" (Fleron, 1999).



Ryc. 1. Gabriel's wedding cake (Kifowit, Stamps, 2006b)

3. Liczby harmoniczne a liczby pierwsze

Liczby harmoniczne odgrywają zasadniczą rolę w dowodzie twierdzenia Eulera o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych. Najpierw przytoczymy twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczby naturalnej na iloczyn liczb pierwszych:

Twierdzenie 1
Każdą liczbę naturalną $n \geq 2$ można jednoznacznie (z dokładnością do kolejności czynników) zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Dowód. Zobacz (Sierpiński, 1950).

Twierdzenie 2
Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych, oznaczmy je przez $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Rozważmy szeregi

$$1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Oczywiste jest, że są one zbieżne, jako szeregi geometryczne o ilorazach $\frac{1}{p_k}$, gdyż $\left|\frac{1}{p_k}\right| < 1$. Zatem ich sumy S_{p_k} są równe $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$. Stąd zaś

$$S = \prod_{k=1}^{n} S_{p_k} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right).$$

Z drugiej strony, biorąc pod uwagę iloczyn Cauchy'ego rozważanych szeregów, mamy

$$S = \lim_{m_1,\ldots,m_n\to\infty} \sum_{l_1=0}^{m_1} \frac{1}{p_1^{l_1}} \sum_{l_2=0}^{m_2} \frac{1}{p_2^{l_2}} \cdots \sum_{l_n=0}^{m_n} \frac{1}{p_n^{l_n}}$$
$$= 1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1p_2} + \cdots + \frac{1}{p_1p_n} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_2p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} + \ldots$$

Zauważmy, że każda z liczb, w rozkładzie których występują liczby $p_1, \ldots, p_n$ znajduje się w mianowniku jednego z wyrazów iloczynu Cauchy'ego rozważanych szeregów $S_{p_1} \cdot S_{p_2} \cdot \ldots S_{p_n}$ i to dokładnie jeden raz.
Z jednoznaczności rozkładu na liczby pierwsze wnioskujemy, że powyższe mianowniki odpowiadają wszystkim różnym liczbom naturalnym. Stąd naszą sumę S możemy zapisać jako $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Stąd suma szeregu harmonicznego jest liczbą, bowiem S jest liczbą. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

4. Wybrane oszacowania liczb harmonicznych

Pokażemy teraz przykłady podstawowych twierdzeń dotyczących oszacowań liczb harmonicznych.

Lemat 2
Dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności:

$$\frac{n+1}{2} \le \mathcal{H}_{2^n} \le n+1.$$

Dowód. (indukcyjny)

1. Dla $n = 1$ mamy $\mathcal{H}_2 = \frac{3}{2}$, więc $1 \le \mathcal{H}_2 < 2$.

2. Załóżmy, że $\frac{k+1}{2} \le \mathcal{H}_{2^k} \le k+1$ dla dowolnie ustalonego $k \in \mathbb{N}$.
   Wtedy:

   $$\mathcal{H}_{2^{k+1}} = \mathcal{H}_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \le k+1 + \frac{2^{k+1}-2^k}{2^k} = k+2.$$

   Z drugiej strony

   $$\mathcal{H}_{2^{k+1}} = \mathcal{H}_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \ge \frac{k+1}{2} + \frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}} = \frac{k+2}{2}.$$

   Stąd $\frac{k+2}{2} \le \mathcal{H}_{2^{k+1}} \le k+2$.

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej, $\frac{n+1}{2} \le \mathcal{H}_{2^n} \le n+1$ dla każdego $n \in N$.

Przy pomocy liczb harmonicznych można zdefiniować liczbę γ zwaną stałą Eulera. Mianowicie:

LEMAT 3
Istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{H}_n - \ln n).$$

Dowód. Korzystając z rozwinięcia w szereg Maclaurina, mamy:

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \cdots .$$

Szereg ten jest zbieżny dla wszystkich k takich, że $-1 < -\frac{1}{k} \leq 1$, więc w szczególności dla $k > 1$. Jeśli zsumujemy obie strony po $2 \leq k \leq n$, to otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}[\ln k - \ln(k-1)] &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \cdots\right),\\
\ln n - \ln 1 &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \ldots,\\
\ln n &= (\mathcal{H}_n - 1) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}_n^{(2)} - 1) + \frac{1}{3}(\mathcal{H}_n^{(3)} - 1) + \cdots .
\end{aligned}$$

Stąd zaś

$$\mathcal{H}_n - \ln n = 1 - \frac{1}{2}(\mathcal{H}_n^{(2)} - 1) - \frac{1}{3}(\mathcal{H}_n^{(3)} - 1) - \frac{1}{4}(\mathcal{H}_n^{(4)} - 1) - \cdots .$$

Zgodnie z Wnioskiem 1, na podstawie głębszych twierdzeń analizy matematycznej, dostaniemy

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{H}_n - \ln n) = 1 - \frac{1}{2}(\zeta(2) - 1) - \frac{1}{3}(\zeta(3) - 1) - \frac{1}{4}(\zeta(4) - 1) - \cdots ,$$

gdzie po prawej stronie tej równości mamy sumę szeregu zbieżnego, a więc liczbę. Liczba ta nazywana jest stałą Eulera γ, wynosi ona w przybliżeniu $0,577218$ (Euler, 1734).

Powyższy lemat nasuwa przypuszczenia, że istnieje zależność między liczbami harmonicznymi a logarytmem naturalnym.
Faktycznie, mamy następujące oszacowanie:

TWIERDZENIE 3
Dla każdego $n \geq 2$ zachodzą nierówności:

$$\ln(n+1) < \mathcal{H}_n < \ln n + 1.$$

Dowód. Określmy funkcję $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.
Rozważmy rodzinę prostokątów o wierzchołkach:

$$A_n = (n, 0),\ B_n = (n+1, 0),\ \ C_n = (n, f(n)),\ D_n = (n+1, f(n))$$

leżących (częściowo) nad wykresem funkcji f. Każdy z tak utworzonych prostokątów ma bok długości 1 leżący na osi x, zaś długości sąsiednich boków tych prostokątów wynoszą kolejno $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.
Zatem:

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \mathcal{H}_n.$$

Rozważmy teraz rodzinę prostokątów o wierzchołkach:

$$A_n = (n, 0),\ B_n = (n+1, 0),\ C_n = (n, f(n+1)),\ D_n = (n+1, f(n+1))$$

leżących pod wykresem funkcji f. Podobnie jak poprzednio każdy prostokąt ma bok długości 1 leżący na osi x, zaś długości sąsiednich boków tych prostokątów wynoszą kolejno $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
Zatem:

$$\int_1^{n} f(x)\mathrm{d}x = \ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \mathcal{H}_n - 1.$$

Stąd $\mathcal{H}_n < \ln n + 1$. Ostatecznie $\ln(n+1) < \mathcal{H}_n < \ln n + 1$.

PRZYKŁAD 1
Oszacujmy wartość liczby $\mathcal{H}_{16} = \mathcal{H}_{2^4} = 3\frac{274399}{720720}$.

Na mocy Lematu 2 mamy

$$2 \leq \mathcal{H}_{16} \leq 4,$$

zaś z twierdzenia 3, ponieważ $\ln 17 > 2,83$ i $\ln 16 < 2,77$ wynika, że

$$2,83 < \mathcal{H}_{16} < 3,77.$$

Literatura

Cesaro, E.: 1885, Sur la serie harmonique, *Nouvelles Annales de Mathméatiques* **4**.

Chen, C.-P., Qi, F.: 2008, The best bounds of the n^{th} harmonic number, *The Global Journal of Applied Mathematics* & *Mathematical Sciences* **1**(1), 41-49.

Chen, H., Kennedy, C.: 2012, Harmonic series meets Fibonacci sequence, *The College Mathematics Journal* **43**, 237-243.

DeTemple, D., Wang, S.-H.: 1991, Half-integer approximations for the partial sums of the harmonic series, *J. Math. Anal. Appl.* **160**.

Dunham, W.: 1990, *Journey Through Genius*, John Wiley & Sons.

Euler, L.: 1734, De progressionibus harmonicis observationes, *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* **19**, 150-161.

Fichtenholz, G. M.: 1995, *Rachunek różniczkowy i całkowy, t. II*, PWN, Warszawa.

Fleron, J. F.: 1999, Gabriel's wedding cake, *College Mathematics Journal,* 35-38.

Kaczyński, A.: 2005, *Podstawy analizy matematycznej. Rachunek całkowy. Szeregi*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Kifowit, S., Stamps, T.: 2006a, The harmonic series diverges again and again, *The AMATYC Review* **27**, 31-43.

Kifowit, S., Stamps, T.: 2006b, Serious About the Harmonic Series II, *Prairie State College* .

Lodge, A.: 1904, An approximate expression for the value of $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{r}$, *Messenger of Mathematics* **30**.

Patashnik, O., Graham, R., Knuth, D.: 2001, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa, 304-307.

Sharp, R.: 1954, Problem 52: Overhanging dominoes, *Pi Mu Epsilon Journal* **1**, 411-412.

Sierpiński, W.: 1950, *Teoria liczb, Monografie Matematyczne* **19**, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa - Wrocław.

Sinha, P.: 2013, An easy proof of the divergence of the harmonic series sum, *American Mathematical Monthly* **120**, 354.

Toth, L., Mare, S.: 1991, Problem E 3432, *Amer. Math. Monthly* **98**.

Villarino, M. B.: 2004, Ramanujan's Approximation to the n th Partial Sum of the Harmonic Series, *Depto. de Matematica, Universidad de Costa Rica,* 2-6.

Villarino, M. B.: 2007, *Sharp Bounds for the Harmonic Numbers*, Depto. de Matematica, Universidad de Costa Rica.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko - Mazurski
ul. Słoneczna 54
PL-10-710 Olsztyn
e-mail dawi@matman.uwm.edu.pl