FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

Danuta Ciesielska, Zbigniew Powązka

O pewnym sposobie kontroli rozumienia wybranych pojęć z analizy matematycznej przez studentów studiów matematycznych*

Abstract. In the last years in Poland new standards for the matriculation examination have been established, especially in mathematics. Subsequently, for many years at the Pedagogical University of Krakow research has been conducted on difficulties that students experience in understanding the basic concepts of mathematical analysis. For the results of this research see: Powązka, Z. (2006; 2009); these are the reports of research conducted in the academic years: 2003/2004 and 2006/2007.

Our main goal was to develop such a method of examination that would show the effectiveness of teaching without inappropriate rating, which is so typical in a standard test. The exam has a form of a standard test but the candidates give answers to four questions in one task, confirming or denying the presented thesis. We propose a new method of test scoring. Results of the test eventually give two numbers: the first is the number of correct answers given in one task, the second is the number of correct answers in the entire test. Both the numbers and order of their corresponding pairs are the basis of the final grade.

The research was conducted at the Pedagogical University of Krakow at the end of the winter semester of the academic year 2010/2011, during the mathematical analysis examination test. The test was taken by 87 first year mathematics students.

1. Wstęp

Od wielu lat były prowadzone wśród studentów Akademii Pedagogicznej, obecnie Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, badania nad trudnościami w rozumieniu podstawowych pojęć analizy matematycznej. Wybór tego przedmiotu do badań wynika z faktu, że należy on do podstawowego kanonu treści wykładanych na wszystkich typach studiów matematycznych i znajduje zastosowania w różnych działach matematyki.

*On the control of comprehension of some basic concepts of calculus

2010 Mathematics Subject Classification 97B40, 97D60, 97I20, 97I30

Key words and phrases: Student assessment, achievement control and rating, students errors, mappings and functions, sequences and series

Sukces w studiowaniu analizy matematycznej może w istotny sposób zależeć od matematycznego przygotowania ze szkoły ponadgimnazjalnej. Wprowadzane od roku 2002 w naszym kraju reformy edukacji w szkołach ponadgimnazjalnych i towarzyszące im zmiany w egzaminie maturalnym z matematyki spowodowały, że kandydaci na studia dysponują mniejszym zakresem pojęć matematycznych potrzebnych do studiowania analizy matematycznej. Fakt ten potwierdziły np. prace Z. Powązki (2006; 2010), w których przedstawione zostały wyniki badań prowadzonych w latach 2003/2004 oraz 2006/2007 podczas zajęć z analizy matematycznej na roku pierwszym. Badania na ten temat prowadziła także D. Ciesielska w latach 2004/2005 oraz 2005/2006.

Wybór studentów zaczynających studia w latach 2003-2007 do przeprowadzenia badania nie był przypadkowy. W roku 2003 przyszli na uczelnię absolwenci szkół średnich jeszcze z czteroletniego liceum, które zostało zreformowane. Natomiast w roku 2004 badaniom poddani zostali absolwenci, którzy ukończyli już trzyletnią szkołę ponadgimnazjalną. Obecne badania, przeprowadzone w roku akademickim 2010/2011, objęły grupę studentów, którzy zdawali po raz pierwszy po 27 latach obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki. Analiza matematyczna jest działem matematyki zawierającym wiele pojęć abstrakcyjnych. Część z nich ma swoje uwarunkowania w otaczającej nas rzeczywistości, ale zdecydowana większość ma charakter ogólny, oderwany od konkretu. Dlatego przy jej studiowaniu konieczne jest możliwie szybkie wdrażanie studenta do abstrakcyjnego myślenia. Nie da się jednak tego osiągnąć bez sensownej podbudowy w klasycznych modelach, które poznawane są na niższych poziomach edukacji.

W czasie uczenia się i studiowania dokonuje się w umyśle słuchaczy proces poznawczy. J. Kozielecki (1976, s. 183) uważa, że:

> człowiek jest pewnym układem poznawczym, który przetwarza informacje (information processing system). Przyjmuje informacje ze świata zewnętrznego, czyli spostrzega, koduje je w pamięci trwałej, wreszcie operuje tymi informacjami, czyli myśli.

Powstaje wtedy w umyśle słuchacza swoisty obraz wykładanej teorii, złożony z obrazów poszczególnych pojęć w niej występujących.

Przez obraz pojęcia (concept image) rozumiemy tu pewne schematy myślowe, reguły postępowania, intuicje i fakty przyjęte za prawdziwe w wyniku logicznej analizy, lub zaakceptowane jako obowiązujące, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami (por. np. Bugajska-Jaszczołt, 2001; Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Major, 2006a, 2006c, 2006b; Przeniosło, 2001, 2004; Tall, Vinner, 1981).

Wymienione powyżej elementy obrazu pojęcia tworzą swoistą strukturę poznawczą.

Jak zauważa J. Major (2006c),

> w strukturze tej istotne jest dostrzeganie zależności między jej elementami i związków z obrazami innych pojęć. Przy czym nie wszystkie elementy struktury bywają uświadomione, a niektóre mogą pozostać w sprzeczności ze sobą.

Z filozoficznego punktu widzenia istnieje różnica między pojęciem rozumianym jako:

> Najprostszy składnik aktów poznawczych, a aktem nienaocznego, czysto myślowego poznawania czegoś. W tym drugim znaczeniu akt jest czynnością psychiczną, genetycznie zależną – przynajmniej pośrednio – od aktów przedstawiania zmysłowego, czyli wyobrażania. Treścią aktu pojęciowego jest jego „obrazów" struktura, dzięki której jest on skierowany do takiego a nie innego przedmiotu (zob. Herbut, 1977, s. 426).

Tworzenie się obrazów poszczególnych pojęć i ich adekwatności z pojęciami zależy od możliwości poznawczych i motywacji poszczególnych odbiorców oraz dydaktycznych umiejętności prowadzących zajęcia.

Podczas studiowania przedmiotu, jak również przy spiralnej koncepcji nauczania, w wyniku powracania do poszczególnych pojęć w różnym stopniu ogólności, może ukształtować się w świadomości studenta właściwy obraz pojęcia. Proces ten jest jednakże długi. O tym, czy rzeczywiście nastąpił, możemy dowiedzieć się przez badanie skuteczności uczenia, do której W. Nowak zalicza: wiedzę werbalną, techniki intelektualne, strategie poznawcze, postawy i techniki motoryczne (zob. Nowak, 1989, s. 145).

2. Uwagi metodologiczne

Celem naszych badań było skonstruowanie takiego narzędzia, które pozwoliłoby na zbadanie wspomnianej powyżej skuteczności nauczania. Chodziło, z jednej strony, o wyodrębnienie z badanych studentów grupy osób, które są szczególnie uzdolnione i posiadły wiedzę z kursu analizy matematycznej 1 (por. Programy nauczania) na zadowalającym poziomie. Z drugiej strony chcieliśmy zbadać, jakie tematy z wykładanej teorii sprawiły studentom szczególne trudności. W opisie wyników podejmiemy próbę wyjaśnienia przyczyn tych trudności. W budowie tego narzędzia przyjęto za Z. Dyrszlagiem (zob. Dyrszlag, 1978) następujące poziomy rozumienia pojęć matematycznych:

1) poziom definicyjnego, formalnego rozumienia pojęcia,
2) poziom lokalnej komplikacji,
3) poziom uogólniania,
4) poziom rozumienia strukturalnego.

Z uwagi na fakt, że badania dotyczyły studentów roku pierwszego, to oczekiwanym było jedynie rozumienie pojęć matematycznych na pierwszym i drugim poziomie.

Badania były przeprowadzone na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie na zakończenie zimowego semestru roku akademickiego 2010/2011 w ramach egzaminu z analizy matematycznej 1. Wzięło w nich udział 87 studentów I roku matematyki studiów I stopnia.

Zgodnie z obowiązującym w roku akademickim 2010/2011 programem analizy matematycznej (zob. *Programy studiów rozpoczynających się od roku akademickiego 2010/2011*, 2011) na zajęciach w pierwszym semestrze zostały omówione następujące zagadnienia:

– liczby rzeczywiste (aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych, zbiory ograniczone i nieograniczone, kresy zbioru, twierdzenie o indukcji, nierówność Bernoulliego, aksjomat ciągłości i jego konsekwencje, nieograniczoność zbioru liczb naturalnych, istnienie cechy liczby rzeczywistej),
– odwzorowania (pojęcie funkcji, dziedzina, przeciwdziedzina, obraz i przeciwobraz zbioru przez funkcję, parzystość, nieparzystość i okresowość funkcji, ograniczoność i nieograniczoność, surjekcja, injekcja i bijekcja, składanie i odwracanie funkcji, funkcje cyklometryczne, ciągi i podciągi),
– teoria granic (pojęcie granicy właściwej i niewłaściwej ciągu liczbowego, zbieżność, monotoniczność i ograniczoność ciągu działania w zbiorze ciągów zbieżnych do granicy skończonej lub do nieskończoności, twierdzenie o trzech ciągach, liczba e, ciągi Cauchy'ego i ich własności, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, granice jednostronne i granica górna i dolna ciągu liczbowego, definicja Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji).

2.1. Budowa arkusza egzaminacyjnego

Egzamin, o którym wspomnieliśmy powyżej, składał się z dwu części: teoretycznej (test wielokrotnego wyboru) i praktycznej (5 zadań).

Arkusz egzaminacyjny części teoretycznej zawierał 7 pytań typu testowego dotyczącego jednego z następujących zagadnień z analizy matematycznej:

1) własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej,
2) parzystość i nieparzystość funkcji,
3) złożenie funkcji i funkcje okresowe,
4) monotoniczność i różnowartościowość,
5) funkcje odwrotne,
6) kresy zbiorów i ich związek z granicą ciągu,
7) granica funkcji w punkcie.

Każde z tych pytań zawierało cztery podpunkty. Były one tak pomyślane, aby student wybierając lub odrzucając dany podpunkt musiał ujawnić na jakim poziomie rozumie dane pojęcie.

Wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej dotyczyło pytanie, w którym wystarczała tylko znajomość definicji tego pojęcia (zob. Aneks, zadanie 7d). O studencie, który poprawnie rozwiązał to zadanie, można powiedzieć, że rozumie pojęcie wartości bezwzględnej na poziomie pierwszym. Rozumienie tego pojęcia na poziomie drugim wystarczało do rozwiązania podpunktów 7a), 7b) i 7c).

Poprawne rozwiązanie poleceń w zadaniu dotyczącym parzystości i nieparzystości funkcji wymagało rozumienia tych pojęć na poziomie pierwszym (zob. Aneks, zadanie 2a), 2c), 2d)) lub drugim (tamże zadanie 2b)). Odnotujmy i to, że zadania 2a), 2d) wymagały także znajomości definicji wartości bezwzględnej (por. Aneks).

Rozumienie pojęcia okresowości funkcji na poziomie definicyjno-formalnym wystarczyło do poprawnego rozwiązania poleceń z podpunktów 4a) i 4b) (por.

Aneks). Natomiast można przyjąć, że osoby, które rozwiązały poprawnie polecenia 4c) i 4d), rozumieją to pojęcie na poziomie lokalnej komplikacji, potrafili bowiem posłużyć się kontrprzykładami niezbędnymi do odrzucenia sformułowań z tych podpunktów.

Kolejne pojęcie, które przynoszą ze sobą studenci ze szkoły ponadgimnazjalnej, to pojęcie monotoniczności funkcji. W tej szkole rozumie się na ogół funkcję monotoniczną jako rosnącą lub malejącą w swej dziedzinie. W wykładzie analizy matematycznej obok wymienionych powyżej rodzajów funkcji monotonicznych wyróżnia się jeszcze funkcje niemalejące i nierosnące (słabo malejące i słabo rosnące), które nie muszą być różnowartościowe. Osoby poprawnie odpowiadające na pytanie 6a) (por. Aneks) rozumieją pojęcie monotoniczności na poziomie pierwszym. Poprawne odpowiedzi na pozostałe pytania w zadaniu 6 wymagały posłużenia się stosownymi przykładami lub analizowania granicznych przypadków. Można zatem uznać, że są to pytania sprawdzające wiedzę na poziomie lokalnej komplikacji.

Jednym z pierwszych pojęć analizy matematycznej sprawiających studentom spore trudności jest pojęcie kresu zbioru i jego związku z pojęciem granicy ciągu. Zagadnieniom tym było poświęcone zadanie 5 (por. Aneks). Podpunkty 5a) i 5b) wymagają znajomości aksjomatu ciągłości. Można zatem uznać, że osoby, które znały choćby na pamięć odpowiednie twierdzenia odpowiedziały poprawnie. Nie oznacza to zatem, że rozumieją je głębiej niż formalnie. Podpunkty 5c) i 5d) wymagają głębszego rozumienia, tak pojęcia kresu zbioru wartości ciągu, jak i pewnych twierdzeń z teorii granic ciągów. Można więc uznać, że studenci odpowiadający poprawnie na te pytania rozumieją te pojęcia na poziomie lokalnej komplikacji, a może nawet na poziomie czwartym.

Pojęcie granicy funkcji w punkcie pojawiło się na wykładzie analizy pod koniec semestru i nie było jeszcze dokładnie przećwiczone. Dlatego polecenia w zadaniu 1 (por. Aneks) należały do możliwie najprostszych. Uznajemy, że osoby, które odpowiedziały poprawnie na te polecenia rozumieją je definicyjno-formalnie.

2.2. Sposób ocenienia egzaminu

Egzamin miał postać typowego testu. Zdający udzielali odpowiedzi, potwierdzając lub negując podane zdanie. Taki egzamin trudno jest oceniać w sposób eliminujący losowe uzyskanie pozytywnej oceny. Zastosowanie elementarnej wiedzy z zakresu testowania hipotez prowadzi egzaminatorów zwykle do wygórowanych żądań dotyczących liczby poprawnych odpowiedzi. Negatywnym efektem takiego postępowania jest mały zakres punktów przypadających na poprawne odpowiedzi i tym samym otrzymanie bardzo małych przedziałów dla poszczególnych ocen.

Proponując inną niż typową ocenę testu, chcieliśmy nie tylko wyeliminować powyższe niedogodności, ale przede wszystkich dogłębnie ocenić przygotowanie studentów. W tym celu zaproponowaliśmy ocenę, która w pierwszej kolejności premiuje liczbę poprawnych odpowiedzi podanych w jednym zadaniu i dopiero w drugiej kolejności liczbę punktów uzyskanych za cały test. Obie liczby i odpowiedni porządek ich par stanowiły podstawę do wystawienia oceny.

Liczba punktów, które mógł uzyskać zdający za jedno pytanie to:

0 – za brak poprawnych odpowiedzi,

1 – za jedną poprawną odpowiedź,

10 – za dwie,

100 – za trzy oraz

1000 – za komplet poprawnych odpowiedzi.

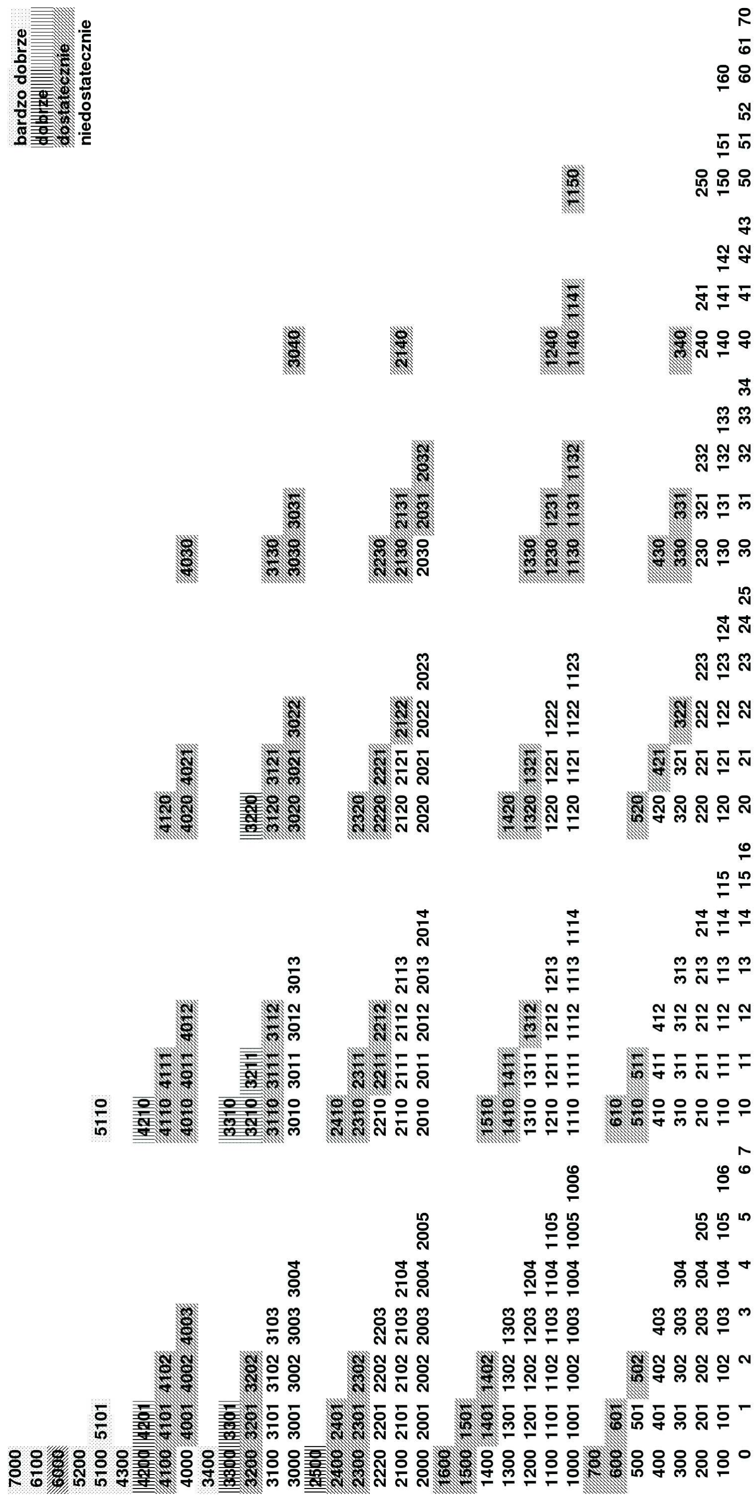
Układając odpowiednio zestawy pytań (por. z 2.1.) oraz oceniając odpowiedzi w powyższy sposób chcieliśmy premiować zdających za opanowanie wiedzy i podstawowych umiejętności w danym zakresie materiału.

Jednym ze skutków wybranego przez nas sposobu punktowania egzaminu była nietypowa tabela możliwych punktów, w której nie pojawiają się wszystkie liczby między najmniejszą wartością (0 pkt) a największą (7 000). Wszystkie możliwe wyniki oraz przypisane im oceny umieściliśmy w odpowiednio przygotowanej tabeli (zob. rysunek 1). Na przykład wynik 3121 oznacza, że student na trzy pytania podał komplet poprawnych odpowiedzi, na jedno pytanie podał dokładnie trzy poprawne odpowiedzi, na dwa pytania podał dokładnie dwie poprawne odpowiedzi oraz na jedno pytanie dokładnie jedną poprawną odpowiedź.

Tabela wyników została przygotowana z wykorzystaniem relacji częściowego porządku; liczby w poziomych liniach oraz odpowiednio pionowych liniach można porównywać. W szczególności liczby umieszczone w poziomych liniach, czytane od lewej do prawej, wskazują wzrost liczby poprawnych odpowiedzi. Liczbom w tabeli jednoznacznie przypisano oceny kierując się ich miejscem w łańcuchu. Na przykład liczbie 3121 odpowiada ocena dostateczna.

Przykładowy test oraz tabelę wyników zawierających również odpowiadające im oceny przedstawiono studentom jeszcze przed egzaminem. Studenci mogli samodzielnie ocenić swoje odpowiedzi, w oparciu o listę poprawnych odpowiedzi dostarczoną im odpowiednio później, jak również sprawdzić ocenę, którą uzyskują na podstawie swoich wyników. Mogli także dostarczyć prowadzącym ćwiczenia odpowiedzi i uzyskać dane o wynikach i ocenie. Ani punktacja testu, ani sposób wystawiania ocen nie sprawiły studentom kłopotów. Jedyne uwagi z jakimi zetknęliśmy się dotyczyły kłopotów z porównywaniem wyników.

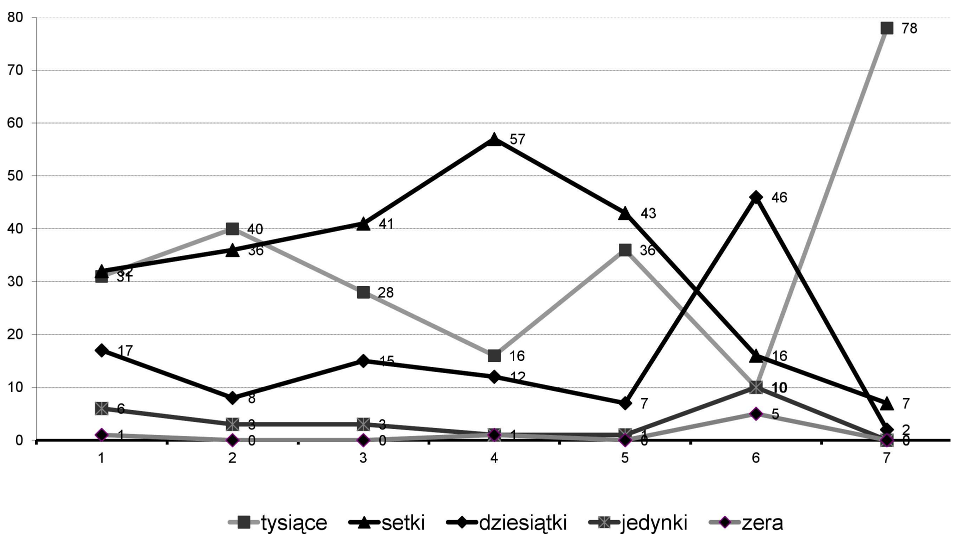
Zauważyliśmy, że wyniki testu, podane w postaci ocen, wyjątkowo dobrze korelują z ocenami jakie otrzymali studenci z zaliczenia przedmiotu. Oznaczało to w szczególności, że prawie wszyscy studenci otrzymali pozytywną ocenę z testu i równocześnie bardzo niewiele osób otrzymało ocenę bardzo dobrą.



Rysunek 1.

3. Omówienie wyników badań

Otrzymane wyniki prezentują wykresy na rysunku 2. Przedstawiono na nim krzywe charakteryzujące liczbę poprawnych odpowiedzi w każdym zadaniu. Pierwsza seria odpowiada czterem poprawnym odpowiedziom, druga – trzem, trzecia – dwóm, czwarta – jednej, brakowi poprawnych odpowiedzi zaś seria piąta. Każdy z punktów na osi odciętych reprezentuje kolejne zadanie (licząc od pierwszego do siódmego). Jeżeli student udzielił czterech poprawnych odpowiedzi w danym zadaniu, to fakt ten interpretujemy jako opanowanie przez badanego stosownych treści na zakładanych przez nas poziomach. Analiza położenia krzywych (zob. rysunek 2) pokazuje, że wykres odpowiadający czterem poprawnym odpowiedziom („serie-1") tylko dla zadania 2 oraz 7 góruje na pozostałymi wykresami, a dla zadania pierwszego pokrywa się z wykresem odpowiadającym trzem poprawnym odpowiedziom



Rysunek 2.

Badania ujawniły, że najlepiej wypadło zadanie dotyczące wartości bezwzględnej – jest to zadanie 7. Poprawnie rozwiązało je 78 badanych, a jedynie 9 osób popełniło błędy. Dotyczyły one rozstrzygnięcia:

– prawdziwości równości $||a| + 2| = |a| + 2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a,
– prawdziwości nierówności $||a|+|b|| \geqslant |a-b|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b,
– prawdziwości nierówności $||a|-|b|| \geqslant |a+b|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

Osoby, które odpowiedziały negatywnie w dwu pierwszych przypadkach, ujawniły, że nie rozumieją, iż wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest nieujemna oraz wartość bezwzględna sumy liczb nieujemnych jest tą samą liczbą. Znajomość tych dwu faktów powinna doprowadzić do poprawnej odpowiedzi.

Studenci, którzy stwierdzili, że nierówność w trzecim przypadku jest prawdziwa, pokazali, że nie potrafią znaleźć stosownego kontrprzykładu. Nie mają zapewne rozwiniętego jeszcze tego aspektu matematycznej aktywności (Krygowska, 1986).

Uzyskane w zadaniu 7 wyniki świadczą o opanowaniu przez studentów pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej na pierwszym lub drugim poziomie. Nie musi to oznaczać, że badani w większości mają ukształtowany właściwy obraz tego pojęcia. Jak pokazują wyniki badań (Major, 2006b, 2006c; Major, Powązka, 2006) pojęcie to stwarza studentom spore trudności.

Zadanie 2 dotyczyło parzystości i nieparzystości. Czterech poprawnych odpowiedzi udzieliło jedynie 40 osób (zob. rysunek 2). Najwięcej błędów pojawiło się przy rozstrzyganiu:

- parzystości funkcji będącej złożeniem funkcji nieparzystej z tą samą funkcją,
- parzystości złożenia funkcji nieparzystej z wartością bezwzględną,
- parzystości złożenia wartości bezwzględnej z dowolną funkcją lub funkcją parzystą.

Osoby udzielające błędnych odpowiedzi wykazały się brakiem rozumienia własności funkcji złożonej z funkcją $x \mapsto |x|$ oraz parzystości funkcji na poziomie lokalnej komplikacji tych pojęć.

Najmniej rozwiązań z czterema poprawnymi odpowiedziami odnotowano w zadaniach 4 i 6. Zadanie 4 dotyczyło okresowości funkcji $f(x) = 2^{\cos x}$. Należało wskazać przesłankę, z której wynika okresowość tego złożenia. Jedynie 16 osób udzieliło czterech poprawnych odpowiedzi, a 57 popełniło tylko jeden błąd (zob. rysunek 2). Najwięcej błędów pojawiło się przy analizowaniu prawdziwości stwierdzenia, że okresowość rozważanej funkcji wynika tylko z okresowości funkcji cosinus (uznało je za poprawną jedynie 57 respondentów).

Niejakim zaskoczeniem jest fakt, że ok. 25% studentów uczestniczących w badaniach wiązało okresowość rozważanej funkcji z odwracalnością względnie monotonicznością składanych funkcji. Fakt ten oznacza, że nie rozumieją związków między tymi pojęciami nawet na pierwszym poziomie.

Zauważmy również, że niektórzy badani ujawnili trudności w dostrzeganiu uogólniania twierdzeń. Stwierdzenie w zadaniu 4d) jest uogólnieniem własności opisanej w zadaniu 4a), natomiast liczby popełnionych błędów znacznie się różnią.

Problem związku między zakresami pojęć monotoniczności i różnowartościowości funkcji pojawił się w zadaniu 6. Na wykładzie przez funkcje monotoniczne rozumiano funkcje rosnące, malejące, niemalejące i nierosnące. Tymczasem w szkole ponadgimnazjalnej przez funkcję monotoniczną rozumie się jedynie funkcję rosnącą lub malejącą. W związku z tym w szkole ponadgimnazjalnej funkcja monotoniczna jest różnowartościowa, a zgodnie z definicjami podanymi na wykładzie tak być nie musi. Na ten fakt zwracano studentom wielokrotnie uwagę. Zadanie to miało sprawdzić czy to uogólnienie pojęcia monotoniczności zostało przez nich zrozumiane i przyswojone. Uzyskane wyniki nie potwierdzają zrozumienia tego pojęcia, a obserwacje postaw studentów na zajęciach wskazują na to, że studenci informacje dotyczące monotoniczności elementarnych funkcji mają opanowane jedynie pamięciowo.

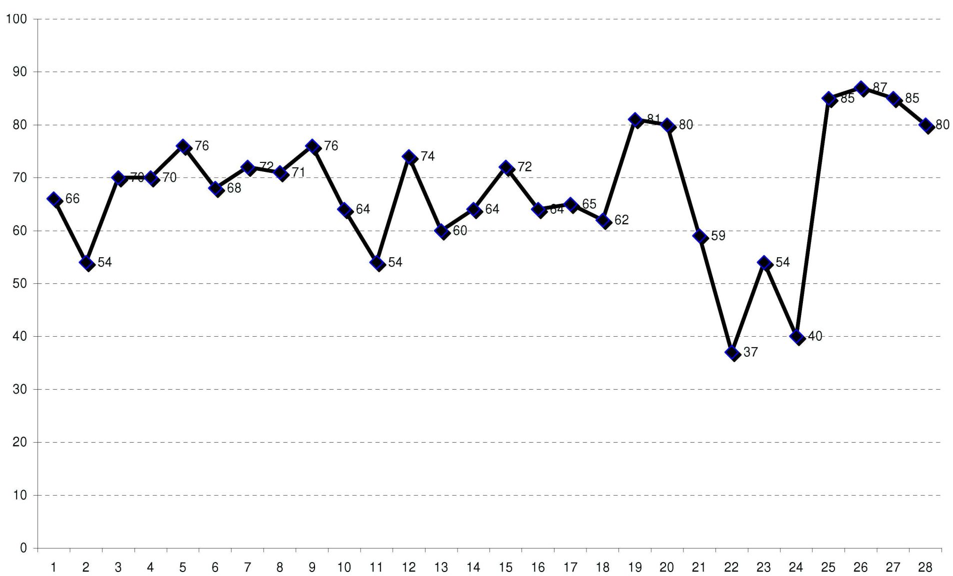
Świadczą o tym uzyskane wyniki: tylko 10 z 87 badanych udzieliło cztery poprawne odpowiedzi w tym zadaniu, a 46 studentów wskazało poprawnie jedynie dwie odpowiedzi (zob. rysunek 2). Najwięcej błędów popełniono w rozstrzygnięciu poprawności stwierdzenia, że nie ma żadnego związku między różnowartościowością i monotonicznością funkcji. Dane te ilustrują fakt powstania w świadomości studentów fałszywych przekonań (Pawlik, 2005; Powązka, 2007, 2009).

Porównywalnie dużo błędów popełniono, akceptując różnowartościowość i monotoniczność jako pojęcia równoważne. Fakt ten może świadczyć o nieznajomości takich funkcji, jak np. $x \mapsto \frac{1}{x}$ lub $x \mapsto x + |x|$.

W zadaniach 1, 3, 5 liczby osób, które udzieliły czterech poprawnych odpowiedzi są mniejsze od liczby osób, które popełniły tylko jeden błąd.

W zadaniu 1 najwięcej błędów pojawiło się podczas stwierdzenia istnienia granicy $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+2}{x-3}$. Fakt ten nie dziwi, ponieważ zagadnienia te pojawiły się tuż przed egzaminem i mogły nie być należycie przećwiczone.

Zadanie 3 było poświęcone własnościom funkcji posiadających funkcję odwrotną. Okazało się, że najwięcej osób miało trudności w ustaleniu związku między monotonicznością i odwracalnością funkcji. Zapewne znowu dało o sobie znać fałszywe przekonanie studentów, że funkcja monotoniczna musi być różnowartościowa.



Rysunek 3. Wyniki testu liczone oddzielnie za podpunkty

Zadanie 5 dotyczyło pojęcia kresu i jego związku ze zbieżnością ciągu oraz aksjomatu ciągłości. Najwięcej trudności mieli studenci ze stwierdzeniem, czy istnienie cechy liczby rzeczywistej jest konsekwencją aksjomatu ciągłości, mimo tego, że twierdzenie to było dowodzone na wykładzie. Jest to jednak twierdzenie o istnieniu pewnego obiektu, a tego typu twierdzenia sprawiają studentom duże trudności. Dla porównania naszego systemu oceniania z systemem, w którym podstawę oceny stanowi liczba prawidłowych odpowiedzi na oddzielne pytania sporządziliśmy odpowiednią tabelę danych oraz wykres je ilustrujący (zob. rysunek 3). Łatwo zauważyć, że wykres ten daje dużo mniej informacji o wiedzy studentów niż rysunek 2. Można to prześledzić na przykładzie zadań 4 i 5 (zob. rysunek 2) oraz odpowiadającym im punktom 16-20 oraz 21-24 (zob. rysunek 3).

4. Podsumowanie

Podsumowując wyniki egzaminu możemy stwierdzić, że tak przeprowadzony egzamin testowy pomógł nam wyłonić najlepiej przygotowanych studentów. Równocześnie pozwolił na wyodrębnienie tych zagadnień, które zostały na tym poziomie opanowane w zadowalający sposób, ale – co ważniejsze – wskazał na takie tematy, które wymagają dalszych zabiegów dydaktycznych. Należy do nich badanie różnych własności funkcji złożonych. Trudności w tym zakresie ujawniły się również na zajęciach w drugim semestrze studiów. Znając jednak wyniki egzaminu, byliśmy na nie przygotowani i mogliśmy w miarę skutecznie reagować.

Ważną zaletą testu było ujawnienie fałszywego przekonania związanego z monotonicznością, różnowartościowością, a w konsekwencji odwracalnością funkcji. Okazało się, że źródłem tych przekonań stało się uogólnienie definicji funkcji rosnącej i malejącej, znanych studentom z wcześniejszego poziomu edukacji. Zastąpienie w następnikach implikacji występujących w tych definicjach nierówności ostrych przez nierówności słabe w istotny sposób zwiększyło zbiór desygnatów spełniających nowe definicje, ale spowodowało zmianę znanych wcześniej własności. Doprowadziło to do pojawienia się u niektórych studentów fałszywych przekonań. Warto pamiętać o tym mechanizmie przy innych uogólnieniach.

Przypomnijmy na koniec, że przygotowanie takiego egzaminu wymaga sporego wysiłku całego zespołu prowadzącego zajęcia, któremu w tym miejscu pragniemy serdecznie podziękować za współpracę.

Literatura

Bugajska-Jaszczołt, B.: 2001, O rozumieniu pojęcia kresu zbioru przez uczniów liceum, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 51-93.

Bugajska-Jaszczołt, B., Treliński, G.: 2002, Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), *XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki*, CD–ROM.

Dyrszlag, Z.: 1978, *O poziomach i kontroli rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym*, Studia i Monografie 65 (seria B), WSP w Opolu.

Herbut, J.: 1977, *Leksykon filozofii klasycznej*, Lublin.

Kozielecki, J.: 1976, *Koncepcje psychologiczne człowieka*, PIW, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Major, J.: 2006a, Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 297-310.

Major, J.: 2006b, Uwagi na temat obrazu wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 6, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 171-176.

Major, J.: 2006c, Uwagi na temat obrazu wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów matematyki, w: M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej im. J. Kochanowskiego, Kielce, 143-150.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Pewne problemy dydaktyczne związane z pojęciem wartości bezwzględnej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Pawlik, B.: 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 365-376.

Powązka, Z.: 2006, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na I roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 229-295.

Powązka, Z.: 2007, Príklady chýb v porozumení základných pojmov matematickej analýzy skúmaných u študentov učitel'stva matematiky, *Acta Mathematica* **10**, 177-182.

Powązka, Z.: 2009, Uwagi o kształtowaniu rozumienia pojęcia miary na różnych poziomach edukacji, *Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, Współczesne problemy nauczania matematyki* **2**, 141-149.

Powązka, Z.: 2010, Przyczynek do badań nad przygotowaniem absolwentów szkół ponadgimnazjalnych do studiowania matematyki na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **III**, 141-146.

Programy studiów rozpoczynających się od roku akademickiego 2010/2011: 2011, http://www.ap.krakow.pl/mat/sprawydyd/PlanPrg. Data dostępu 15 XI 2011 r.

Przeniosło, M.: 2001, Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **23**, 95-124.

Przeniosło, M.: 2004, Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university, *Educational Studies in Mathematics* **55**, 103-132.

Tall, D., Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: dciesie@up.krakow.pl
e-mail: powazka@up.krakow.pl

Aneks

1. Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x \neq 3$. Wtedy

a) dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $x_n \neq 3$, $n \in \mathbb{N}$ jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to 3} |f(x)| = +\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wtedy

a) jeśli f jest funkcją parzystą, to $x \mapsto f(|x|)$ jest funkcją parzystą,

b) funkcja $x \mapsto f(|x|)$ jest parzysta dla każdej funkcji f,

c) jeśli f jest nieparzysta, to $x \mapsto |f(x)|$ jest funkcją parzystą,

d) jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $f \circ f$ jest parzysta.

3. Czy prawdziwe jest twierdzenie:

a) funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest funkcją rosnącą,

b) każda funkcja nieparzysta jest odwracalna,

c) każda funkcja monotoniczna jest rosnąca lub malejąca,

d) $\arcsin \circ \sin = \sin \circ \arcsin$.

4. Okresowość funkcji $f(x) = 2^{\cos x}$ wynika

a) tylko z okresowości funkcji $x \mapsto \cos x$,

b) z faktu, że złożenie funkcji okresowej z dowolną funkcją jest funkcją okresową,

c) z faktu, że złożenie funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,

d) z odwracalności funkcji wykładniczej.

5. Czy prawdą jest, że

a) istnienie cechy liczby rzeczywistej jest konsekwencją aksjomatu ciągłości,

b) każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny,

c) ciąg $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny,

d) każdy niepusty i ograniczony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kresy.

6. Niech $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ bądzie dowolną funkcją. Wtedy:

a) różnowartościowość funkcji f jest równoważna jej monotoniczności,

b) jeśli f jest różnowartościowa, to jest monotoniczna,

c) jeśli f jest monotoniczna, to jest różnowartościowa,

d) nie ma żadnego związku między monotonicznością a różnowartosciowością funkcji f.

7. Wskazać zdania prawdziwe.
Czy podane twierdzenia są prawdziwe?

a) Dla każdych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $||a|+|b|| \geqslant |a-b|$.

b) Dla każdych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $||a|-|b|| \geqslant |a+b|$.

c) Dla każdych liczb rzeczywistych a, b zachodzi równość $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

d) Dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $||a| + 2| = |a| + 2$.