FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

*Joanna Major, Zbigniew Powązka*

# Przyczynek do badań nad twórczą postawą studentów podczas rozwiązywania zadań matematycznych*

**Abstract.** In this paper, we understand the term "creative attitude" to denote an action of the learner which consists in undertaking creative activity. This activity can take different forms, such as: discovery, invention, a creative act, etc. We understand "discovery" to denote a fact which already exists but was unknown to the discoverer. While teaching mathematics, we deal with such an understanding of "discovery" e.g. when we use the problem method. Thence, subjectively new theorems can emerge during the solving of a mathematical problem by a student. Analyzing the collected research material, we try to determine the ability of students to find various regularities, which arise while solving mathematical problems, and to formulate these regularities in the form of theorems. We also pay attention to errors made by the respondents. The results of these observations may be helpful in assessing various aspects of mathematical activity of the examined individuals.

## 1. Wstęp

Do opisu ludzkiej działalności psychologia stosuje pojęcie *postawy*. Nie zostało ono jednoznacznie zdefiniowane i przez wielu psychologów jest używane w różnych znaczeniach. A. S. Reber i E. S. Reber (1981, s. 555-556) stwierdzili, że *współczesne rozumienie postawy zawiera zwykle kilka komponentów*. Wśród nich wymieniane są następujące:

– *poznawczy (świadome przekonanie lub opinia danej osoby),*
– *afektywny (zabarwienie emocjonalne lub uczuciowe),*
– *ewaluatywny (pozytywny lub negatywny),*
– *motywacyjny (dyspozycja do działania).*

W cytowanej tu książce (Reber, Reber, 1981, s. 829) terminem *twórczość* określa się *procesy umysłowe, które prowadzą do rozwiązania problemu, do nowych*

*Some contribution to the research on students' creative attitude in solving mathematical tasks

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 97B50 Key words and phrases: creative attitude, discover theorems in teaching mathematics, solving mathematical problems

*idei, teorii, form artystycznych, konceptualizacji czy wytworów, które są wyjątkowe i nowe.*

W niniejszej pracy przez *postawę twórczą* rozumiemy postawę warunkującą aktywność osoby uczącej się, polegającą na podejmowaniu działalności twórczej. Ta aktywność może przybierać różne formy. R. Gloton i C. Clero (1985, s. 36) wyróżnili następujące formy aktywności twórczej: odkrycie, inwencję, twórczość, różnicując między sobą znaczenie tych terminów. Dla przykładu przez *odkrycie* rozumieją ci autorzy fakt, który już istnieje, ale był nieznany osobie poznającej go[1]. W procesie nauczania matematyki z takim rozumieniem odkrycia mamy do czynienia np. podczas stosowania metody problemowej (zob. np. Siwek, 2005, s. 97-99). Subiektywnie nowe dla ucznia twierdzenia mogą wtedy pojawiać się w trakcie rozwiązywania zadania matematycznego. Z. Krygowska (1977, s. 100-101) wyróżniła cztery sytuacje, w których rozwiązanie odpowiednio dobranego zadania prowadzi do wykrycia twierdzenia. *W pierwszej uczeń odkrywa twierdzenie, rozwiązując zadanie dane mu a priori. … W sytuacji drugiej uczeń rozwiązuje dane mu, ale bardziej otwarte zadanie, w którym wyraźnie widać już, że chodzi o wykrycie i dowód nowego twierdzenia … W sytuacji trzeciej uczeń sam zadaje takie pytania i sam lub przy pomocy nauczyciela szuka na nie odpowiedzi. … Wreszcie może się zdarzyć i zdarza się, że uczeń formułuje twierdzenie w postaci hipotezy, wyrażając w ten sposób spostrzeżenie na przykład pewnej regularności obserwowanej w poszczególnych przypadkach lub intuicyjnie oczywistej relacji. Pytanie dotyczy wtedy ogólnej „prawdziwości" tego, co zauważono.* Bywają jednak takie sytuacje dydaktyczne, które nie do końca mieszczą się w przypadkach opisanych przez Z. Krygowską. W naszej pracy (Major, Powązka, 2009, s. 215-220) podaliśmy kilka przykładów zadań stereometrycznych, w których refleksja nad otrzymanym rozwiązaniem prowadzi do sformułowania subiektywnie nowych dla uczniów twierdzeń matematycznych. Omawiane tam zadania nie pozwalają na realizację w pełni żadnej z sytuacji opisanych powyżej. W wyniku refleksji nad rozwiązaniami formułuje się twierdzenia o pewnych obiektach matematycznych. Istotny jest tu fakt, że pytania matematyczne (polecenia) zawarte w treści zadań dotyczą innych obiektów niż te, o których mowa w twierdzeniach. Na przykład zadanie dotyczy wyznaczenia objętości prostopadłościanu, podczas gdy formułowane twierdzenie dotyczy zależności pomiędzy miarami kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z jego krawędziami. W takich przypadkach świadomie posługujemy się terminem *znalezienie twierdzenia*[2].

## 2. Uwagi metodologiczne

W tej części pracy sformułujemy cel badań, opiszemy ich organizację, scharakteryzujemy studentów w nich uczestniczących i omówimy narzędzia badawcze.

Badania były próbą uzyskania choćby częściowej odpowiedzi na następujące pytanie: *Czy i jakie twierdzenia matematyczne są w stanie znaleźć i udowodnić*

[1] Natomiast *akt twórczy* polega na powołaniu do istnienia czegoś, czego jeszcze nie było.

[2] Termin ten został zaczerpnięty z (*Mały Słownik języka polskiego*, 1982) i oznacza: 1. *odnaleźć*, 2. *odszukać kogoś lub coś schowanego*, … 3. *natrafić na coś*, 4. *stwierdzić występowanie czegoś*.

*studenci w procesie refleksji nad uzyskanym rozwiązaniem odpowiednio skonstruowanego zadania?*

Analizując zebrany materiał badawczy podejmujemy więc próbę określenia umiejętności studentów w znajdowaniu różnych prawidłowości pojawiających się podczas rozwiązywania zadań matematycznych i formułowania tych prawidłowości w postaci stwierdzeń. Zwracamy też uwagę na błędy popełniane przez respondentów. Uzyskane wyniki obserwacji mogą być pomocne w ocenie różnych aspektów matematycznej aktywności osób poddanych badaniom[3].

Badania zostały przeprowadzone w semestrze letnim roku akademickiego 2009/2010 na czterech rocznikach matematycznych, nauczycielskich studiów dziennych na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. Uczestniczyło w nich łącznie 141 osób, w tym 66 studentów roku I, 20 studentów roku II, 28 studentów z roku III i 27 studentów z roku IV. Prowadzone badania na roku II zostały potraktowane jako badania pilotażowe. Testowano w nich opracowany kwestionariusz badań pod względem jego przydatności do realizacji celów zamierzonych badań. Wybór pozostałych grup respondentów nie był przypadkowy. Studenci roku pierwszego mogli posiadać stosunkowo duże umiejętności rozwiązywania zadań stereometrycznych z uwagi na niedawne zdawanie egzaminu maturalnego. Studenci roku trzeciego, kończąc edukację na poziomie licencjatu, po odbyciu wielu zajęć w czasie których przybliżano im „matematykę szkolną", nabywają uprawnienia do nauczania matematyki w szkołach podstawowych i gimnazjach. W szczególności powinni więc posiadać pewne umiejętności w zakresie dostrzegania analogii i formułowania wniosków inspirowanych rozwiązaniem zadania matematycznego. Studenci roku piątego byli przedstawicielami ostatniego rocznika, który na naszym Uniwersytecie kończył jednolite, pięcioletnie studia magisterskie. W czasie pięciu lat studiów osoby poddane badaniom miały okazję do zapoznania się z wieloma działami matematyki, a w ramach licznych zajęć, w tym zajęć z dydaktyki matematyki, poznawały specyfikę „matematyki szkolnej". Należało przypuszczać, że powinni oni być możliwie najlepiej, ze wszystkich badanych, przygotowani do twórczej pracy na lekcjach matematyki.

Na użytek badań skonstruowano kwestionariusz badań. Oto treść zadań, drugiego rozbudowanego kwestionariusza badań.

Zadanie 1.

a) *Obliczyć objętość prostopadłościanu, wiedząc, że przekątna długości $d$ tworzy z krawędziami tego prostopadłościanu kąty o miarach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.*

b) *Analizując przeprowadzony rachunek ustalić zależność między długościami krawędzi tego prostopadłościanu, długością jego przekątnej oraz stosownymi funkcjami trygonometrycznymi danych w zadaniu a) kątów.*

c) *Rozstrzygnąć, czy istnieje prostopadłościan, w którym kąty nachylenia przekątnej $d$ do odpowiednich krawędzi spełniają warunki: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnić.*

d) *Rozstrzygnąć, czy suma kwadratów cosinusów kątów $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zależy od wymiarów danego prostopadłościanu.*

[3]Ten aspekt badań został opisany w pracy (Major, Powązka, 2010b).

e) *Rozważyć rzut prostokątny prostopadłościanu na płaszczyznę jego podstawy i znaleźć odpowiednik(i) zależności otrzymanej(ych) w punktach b) i d).*

Zadanie 2.

a) *Obliczyć objętość prostopadłościanu, wiedząc, że przekątna długości $d$ tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\gamma$ i przekątne ścian bocznych tego prostopadłościanu wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą z podstawą kąty o miarach $\alpha$, $\beta$.*

b) *Wykorzystując zależności wyznaczone w punkcie a) tego zadania wykazać równość:* $\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta = \operatorname{ctg}^2\gamma$.

c) *Korzystając ze wzoru z części b) ustalić związek między miarami kątów nachylenia do płaszczyzny podstawy przekątnej sześcianu i przekątnej ściany bocznej tego sześcianu wychodzącymi z tego samego wierzchołka.*

Zadanie 3.

a) *W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $a$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa wiedząc, że kąt nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy wychodzącej z tego samego wierzchołka ma miarę $\alpha$.*

b) *Na podstawie otrzymanego wzoru rozstrzygnąć, czy kąt $\alpha$ może być dowolnym kątem ostrym. Odpowiedź uzasadnić.*

c) *Jak zmienią się odpowiedzi w zadaniach a) i b), gdy zamiast ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratu rozważymy ostrosłup prawidłowy o podstawie trójkąta równobocznego?*

W niniejszej pracy nie podajemy rozwiązań omawianych zadań, gdyż znajdują się one w naszych pracach z lat 2009-2011 (Major, Powązka, 2009), (Major, Powązka, 2010b).

Zadania 1a), 2a), 3a) są naszym zdaniem nietrudnymi zadaniami szkolnymi, które w terminologii Z. Krygowskiej noszą nazwę *zadań - zwykłych zastosowań teorii* (zob. Krygowska, 1977, s. 20-38). W ich rozwiązaniach studenci powinni byli skorzystać z podstawowych wiadomości dotyczących graniastosłupów i ostrosłupów. Gdyby jednak nie pamiętali tych faktów, to w części wstępnej kwestionariusza badań zostały one przypomniane. Pozostałe zadania (1b) - 1e), 2b), 2c), 3b), 3c)) miały stwarzać badanym okazję do podejmowania działalności twórczej. W tej działalności wyróżnić można kilka etapów. Wydaje się, że pierwszym, podstawowym stadium jest **uważna obserwacja sytuacji opisanej** w treści zadania i **dostrzeganie** zachodzących tam prawidłowości oraz precyzyjne ich formułowanie w postaci hipotez. W omawianych badaniach są to zależności między danymi i szukanymi elementami graniastosłupa lub ostrosłupa (zad. 1b), 3b)). Następnym etapem jest **dowodzenie prawdziwości sformułowanych hipotez** (zad. 1c), 1d), 2b)). Etap trzeci polega naszym zdaniem na **zastosowaniu poznanych prawidłowości do rozwiązania zadań dotyczących nowych sytuacji** (zad. 2c)). Ta aktywność umysłowa może często prowadzić do kolejnych odkryć matematycznych. W omawianej tu aktywności niezbędna jest umiejętność dostrzegania i wykorzystywania analogii, uogólniania lub specyfikowania (zad 1e), 3c)).

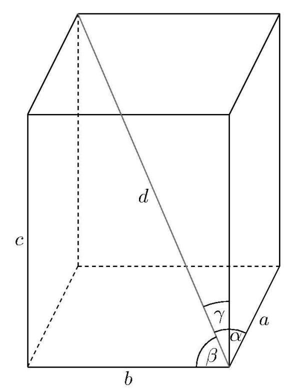
## 3. Wyniki badań

W tym paragrafie omówimy wybrane wyniki uzyskane w badaniach.

### 3.1. Obserwowanie i dostrzeganie prawidłowości oraz formułowanie hipotez

Jak już wspomnieliśmy powyżej, pewne elementy działalności twórczej, tj. obserwacja i dostrzeganie prawidłowości oraz formułowanie hipotez miały w założeniu autorów być sprawdzane przede wszystkim w zadaniach 1b) i 3b).

Zadanie 1b) jest zadaniem otwartym i dopuszcza różnego typu odpowiedzi. W rozwiązaniach mogły pojawić się jedynie zależności potrzebne do rozwiązania zadania 1a) zapisane zgodnie z oznaczeniami z rysunku 1, w jednej z poniższych postaci:




**Rysunek 1.**

$$a = d\cos\alpha, \quad b = d\cos\beta, \quad c = d\cos\gamma, \tag{a}$$

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = d. \tag{b}$$

Stosując twierdzenie o kwadracie długości przekątnej prostopadłościanu otrzymujemy następującą równość:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{c}$$

Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1
*Jeżeli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ są miarami kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami wychodzącymi z jednego wierzchołka, to zachodzą równości (a), (b), (c)*[4].

Natomiast w rozwiązaniu zadania 3b) należało zauważyć, że otrzymane rozwiązanie jest możliwe tylko przy dodatkowym założeniu o mierze kąta $\alpha$. Prawdziwe jest bowiem poniższe twierdzenie.

[4] W pracy (Major, Powązka, 2009), zostało sformułowane twierdzenie 1 jedynie z tezą (c).

Twierdzenie 2
*Niech $\alpha$ będzie kątem, jaki krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa prostego tworzy z krawędzią podstawy. Jeżeli podstawą jest kwadrat, to $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$*[5].

Dostrzeżenie tego faktu wydaje się nam łatwiejszym od odkrycia twierdzenia 1, ponieważ w rozwiązaniu zadania 3a) pojawia się wyrażenie $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$.

W rozwiązaniu zadania 1b) należało więc, analizując przeprowadzony w zadaniu 1a) rachunek, ustalić zależności między długościami krawędzi stosownego prostopadłościanu, długością jego przekątnej oraz stosownymi funkcjami trygonometrycznymi danych w zadaniu kątów. Jak się okazało, jedynie 46% osób rozwiązujących zadanie 1a) udzieliło odpowiedzi w poleceniu 1b). Odnotujmy również i to, że z grupy 56 osób, które poprawnie rozwiązały zadanie 1a), odpowiedzi w zadaniu 1b) udzieliły 53 osoby. Uzyskane odpowiedzi można podzielić na trzy grupy.

Do grupy pierwszej zaliczone zostały odpowiedzi poprawnie opisujące relacje zachodzące między elementami prostopadłościanu, chociaż ich sformułowania nie zawsze są precyzyjne. Oto przykłady takich wypowiedzi[6]:

1. $a = d\cos\alpha, b = d\cos\beta, c = d\cos\gamma$ (ew. równoważne postaci tych wzorów).
2. *Długość odpowiedniej krawędzi jest iloczynem długości boku oraz cosinusa kąta zawartego między przekątną prostopadłościanu i odpowiednią krawędzią.*
3. *Długość krawędzi prostopadłościanu jest równa iloczynowi długości przekątnej $d$ i cosinusa kąta zawartego między przekątną $d$ i tą krawędzią.*
4. $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma} = d$;
5. *Iloraz długości krawędzi jest równy ilorazowi cosinusów stosownych kątów.*
6. *Stosunek boków równa się stosunkowi cosinusów kątów zawartych między nimi a przekątną.*
7. *Krawędzie mają się do siebie tak samo jak cosinusy kątów, które tworzy przekątna z tymi krawędziami:*
$$\frac{a}{b} = \frac{d\cos\alpha}{d\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad \frac{a}{c} = \frac{d\cos\alpha}{d\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad \frac{c}{b} = \frac{d\cos\gamma}{d\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$
(ew. równoważne postaci tych wzorów).
8. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
9. *Suma kwadratów cosinusów kątów jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami równa się 1.*
10. $abc = d^3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.
11. *Objętość prostopadłościanu jest równa iloczynowi trzeciej potęgi długości przekątnej i cosinusów kątów $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.*
12. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin\beta}$.

[5] Dowód tego faktu znajduje się w naszej pracy (Major, Powązka, 2010a).
[6] Przyjmujemy oznaczenia jak na rys. 1.

Jak wspomniano wcześniej, odpowiedzi od 1 do 12 są prawidłowościami wydobytymi przez studentów podczas refleksji nad rozwiązaniem zadania 1a). Wypowiedzi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11 są bezpośrednimi wnioskami z rozwiązania zadania, natomiast stwierdzenia 7, 8, 9, 12 wymagają głębszej refleksji i dodatkowego uzasadnienia, czego byli świadomi niektórzy respondenci z piątego roku matematyki. Z przytoczonych powyżej wypowiedzi wynika, że studenci formułowali zależności w postaci wzorów (np. 1, 4, 8, 12) na ogół bez podania komentarzy dotyczących stosowanych oznaczeń. Były one jednak zgodne z oznaczeniami przyjętymi w rozwiązaniach zadania 1a). W nielicznych pracach pojawił się wzór z objaśnieniami użytych oznaczeń, bądź z dodatkowym rysunkiem. Wypowiedzi słowne 2, 3, 5, 6, 9, 11 sformułowane są w postaci oznajmującej i nie zawierają również żadnych założeń. Wydaje się prawdopodobne, że niektórzy uczestnicy badań poprawnie rozumieją stosowane symbole literowe, ale nie są świadomi konieczności precyzyjnego formułowania w formie pisemnej zaobserwowanych prawidłowości. Odnotujmy w tym miejscu, że niektórzy ankietowani podawali więcej niż jedną zależność (np. 1, 4, 7) lub wzór oraz niekiedy komentarz słowny.

Do drugiej grupy odpowiedzi w poleceniu 1b) zaliczamy takie, które są zdaniami prawdziwymi, ale są zbyt ogólne w stosunku do zadania 1a). Przykładem takich wypowiedzi są:

- *Objętość prostopadłościanu zależy od długości przekątnej i funkcji trygonometrycznych danych kątów.*
- *Objętość zależna jest od kątów $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.*

Grupę trzecią stanowią odpowiedzi, które są zdaniami fałszywymi. Oto przykłady takich wypowiedzi:

- *Długość odpowiedniej krawędzi jest iloczynem boku oraz cosinusa kąta zawartego między długością przekątnej prostopadłościanu i odpowiednim bokiem.*
- *Długości nie mają znaczenia, liczy się tylko przekątna.*
- *Objętość prostopadłościanu jest równa jednej trzeciej iloczynowi trzeciej potęgi długości przekątnej i cosinusów kątów $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.*

Zauważmy, że w pierwszej wypowiedzi popełniono dość częsty błąd, wynikający z nieprecyzyjnego posługiwania się pojęciami teorii miary. W wypowiedzi pojawia się pojęcie odcinka zamiast jego długości.

Analizując wyniki pracy studentów nad zadaniami 3a) i 3b) należy zauważyć, że wśród 52 osób, które poprawnie rozwiązały część a), jedynie 12% osób poprawnie odpowiedziało na część b) tego zadania. Przy czym metody wyznaczania objętości bryły w zadaniu 3a) były, w badanej grupie respondentów, dość jednorodne. Studenci najczęściej wyznaczali z twierdzenia Pitagorasa długości wysokości stosownego ostrosłupa, następnie podejmowali próby wyrażenia objętości bryły przez daną długość boku wielokąta foremnego występującego w podstawie i funkcję trygonometryczną kąta $\alpha$. Badani często popełniali błędy rachunkowe, które powodowały, iż uzyskiwana w zadaniu 3b) odpowiedź była błędna. Wśród badanych znalazły się również 3 osoby z młodszych roczników studiów, które próbowały wyznaczyć objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego bez wykorzystania informacji o mierze kąta $\alpha$. Badani ci próbowali wyznaczyć objętość, zapisując układy równań wynikające ze stosowania twierdzenia Pitagorasa dla wskazanych przez siebie trójkątów prostokątnych.

Na odnotowanie zasługuje fakt, że kilkoro badanych (7 osób) wyznaczając objętości ostrosłupów prawidłowych jako odpowiedź ostateczną uznało wyniki, w których objętość wyrażona była przez nieznane badanemu wielkości, np. przez nie wyznaczoną w rozwiązaniu długość krawędzi bocznej ostrosłupa, długość wysokości ściany bocznej bądź długość promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Studenci biorący udział w badaniach nie radzili sobie również z odpowiedzią na pytanie czy kąt $\alpha$ może mieć dowolną miarę. Badani próbując odpowiedzieć na pytania zapisywali warunki wynikające z zakresu stosowalności podanych przez siebie wzorów na objętość ostrosłupów (np. warunek nieujemności liczby pod pierwiastkiem). Wszyscy badani zrobili to poprawnie. Trudności pojawiały się w momencie próby rozwiązania sformułowanych warunków. Na przykład badany jako rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg}\alpha > 1$ wskazuje przedział $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, co może świadczyć o jego brakach w wiadomościach matematycznych. Zdarzało się również, iż badani jako rozwiązanie nierówności $\operatorname{tg}\alpha > 1$ podawali $\alpha \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podawanie tego typu odpowiedzi może wskazywać, iż u tych studentów zabrakło chwili refleksji nad sensownością otrzymanego rozwiązania, a w szczególności nad tym, iż kąt musi być ostry. Można również przypuszczać, iż prawdopodobną przyczyną błędów jest nastawienie studentów tylko i wyłącznie na rozwiązanie konkretnej nierówności. Można sformułować hipotezę, iż studenci nie mają w pamięci całego zadania i jego rozwiązania, a jedynie pamiętają, iż mają rozwiązać nierówność. Rozwiązanie nierówności staje się celem, po osiągnięciu którego studenci rozwiązanie zadania uważają za skończone. W szczególności nie weryfikują oni odpowiedzi z pytaniem zawartym w zadaniu.

### 3.2. Dowodzenie prawdziwości sformułowanych hipotez

Ważną umiejętnością w twórczej działalności człowieka jest uzasadnianie prawidłowości odkrytych przez siebie lub zaproponowanych przez innych. Wymaga ona zaangażowania posiadanej przez siebie wiedzy i doświadczenia w prowadzeniu rozumowań matematycznych dedukcyjnych lub redukcyjnych. W omawianych badaniach chcieliśmy tę umiejętność weryfikować przede wszystkim w zadaniach 1c), 1d) i 2b).

Próbę rozwiązania zadania 1c) podjęło 67 uczestników badań, ale jedynie 32 osoby rozwiązały zadanie poprawnie. Było to zadanie z negatywną odpowiedzią. Osoby, które udzieliły błędnej odpowiedzi, rozumowały w następujący sposób. Ponieważ w rozważanym prostopadłościanie zachodzą równości:

$$a = d\cos\alpha, \quad b = d\cos\beta, \quad c = d\cos\gamma, \quad \text{oraz} \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4},$$

więc

$$a = b = c = \frac{d\sqrt{2}}{2},$$

zatem wynika stąd, że istnieje prostopadłościan, o którym mowa w treści zadania, i jest nim sześcian. W rozumowaniu tym badani popełnili poważny błąd logiczny. Zapomnieli bowiem, że równości, na których oparte są ich rozumowania, są tezą twierdzenia 1(a). Wynika stąd, że aby skorzystać z tego twierdzenia, należy sprawdzić, czy spełnione są jego założenia. W naszym przypadku wystarczyło np. obliczyć długość przekątnej domniemanego sześcianu i stwierdzić, że jest ona różna od $d$.

Osoby, które w omawianym zadaniu udzieliły poprawnej odpowiedzi, prowadziły bardziej lub mniej świadomie dowód nie wprost. Zakładały, że istnieje taki prostopadłościan i stosowały jeden z poniższych schematów postępowania:

- $S_1$: Skorzystały z twierdzenia 1(c) i faktu, że $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$ i otrzymały sprzeczność $1 = \frac{3}{2}$.
- $S_2$: Skorzystały z twierdzenia 1(a) i ze wzoru na długość przekątnej oraz z faktu $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$ i otrzymały sprzeczność $d = \frac{3d}{2}$.
- $S_3$: Skorzystały z definicji prostopadłościanu i stwierdzały, że jeśli $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$, to trójkąty prostokątne wyznaczone przez krawędź podstawy, przekątną ściany bocznej i przekątną prostopadłościanu są przystające i równoramienne. Wynika stąd, że przekątna ściany bocznej musiałaby mieć długość równą krawędzi tej ściany, co nie jest możliwe.
- $S_4$: Jeżeli taka bryła istnieje, to na mocy twierdzenia 1(a) i faktu, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$, wynika, że jest ona sześcianem. Jeżeli $a$ oznacza długość krawędzi tego sześcianu, wtedy przekątna ściany bocznej ma długość $a\sqrt{2}$. Zatem kąt $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$. W konsekwencji bryła opisana w zadaniu 1c) nie istnieje.

Odnotujmy na koniec, że kilku respondentów dało odpowiedzi poprawne lub błędne bez żadnego uzasadnienia. Prawdopodobnie bazowali oni przede wszystkim na swej intuicji.

Zadanie 1d) dotyczyło rozstrzygnięcia problemu, czy suma kwadratów cosinusów rozważanych kątów jest niezależna od wymiarów prostopadłościanu. W zamierzeniu autorów zadanie to miało spełnić rolę swoistej podpowiedzi do poleceń poprzednich. Próbę rozwiązania zadania podjęło 40 osób z pierwszego, trzeciego albo piątego roku (tj. 32% respondentów). Otrzymano 31 odpowiedzi poprawnych, do czego walnie przyczynili się studenci roku piątego.

Badani udzielający błędnych odpowiedzi uważali, że rozważana suma zależy od wymiarów prostopadłościanu. Jeden z respondentów napisał: *Tak, ponieważ w każdym z cosinusów potrzebujemy wymiary danej krawędzi, przy której znajduje się ten kąt.*

Odpowiedzi poprawne dowodzone były za pomocą twierdzenia 1 (równość a). Analiza prac nie pozwoliła jednak na stwierdzenie, czy zadanie 1d) spełniło swoją rolę i stanowiło wspomnianą podpowiedź.

Dowód w zadaniu 2b) poprawnie przeprowadziło jedynie 21 osób ze 141 badanych. Osoby badane dość często zapisywały zależności zachodzące w prostopadłościanie. Układ warunków podawany przez studentów był zupełny, tj. pozwalał badanym na udzielenie odpowiedzi na pytanie zawarte w treści zadania. Studenci takowej jednak nie udzielali. Na tak kształtujące się wyniki badań mogła mieć wpływ niska dojrzałość matematyczna studentów, a w tym małe doświadczenia w zakresie prowadzenia rozumowań dedukcyjnych.

### 3.3. Zastosowanie poznanych prawidłowości do nowych sytuacji

W twórczej działalności człowieka istotne wydaje się, by posiadana przez niego wiedza stawała się użyteczna w odkrywaniu, opisywaniu i uzasadnianiu nowych twierdzeń. Jak wspomnieliśmy powyżej, niezbędne jest w tym celu posługiwanie się takimi aspektami matematycznej aktywności, jak dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, uogólnianie i specyfikowanie (zob. Krygowska, 1986). Te umiejętności chcieliśmy badać przede wszystkim za pomocą zadań 1e), 3c).

Zadanie 1e) okazało się najtrudniejsze dla badanych studentów. Rozwiązywały je jedynie 23 osoby ze 141 uczestników badań. Studenci podejmując pracę nad zadaniem rozumowali w poniżej opisany sposób.

Rzutem prostokątnym prostopadłościanu na płaszczyznę podstawy jest prostokąt będący podstawą tego prostopadłościanu, zaś rzutem przekątnej prostopadłościanu jest przekątna tego prostokąta. Oznaczmy przez $\alpha'$ i $\beta'$ odpowiednie rzuty na płaszczyznę podstawy kątów $\alpha$ i $\beta$. Wtedy $\alpha' + \beta' = \frac{\pi}{2}$. Przyjmijmy, że w dolnym prawym wierzchołku tego prostopadłościanu (zob. rysunek 1) znajduje się początek układu współrzędnych, którego osie zawierają krawędzie tego prostopadłościanu wychodzące z tego wierzchołka, a na przekątnej umieszczony jest wektor $\vec{v}$ o początku w rozważanym wierzchołku. Wtedy występujące w twierdzeniu 1(c) funkcje trygonometryczne danych kątów są cosinusami kierunkowymi wektora $\vec{v}$. Zauważmy, że rzut prostokątny składowej pionowej tego wektora na płaszczyznę podstawy jest wektorem zerowym. W geometrii przyjmuje się, że wektor zerowy jest prostopadły do tej płaszczyzny. Stąd $\cos\gamma = 0$. Ze wzoru (c) otrzymujemy równość $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' = 1$. Na mocy wzorów redukcyjnych dostajemy $\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha' = 1$. Otrzymaliśmy zatem tzw. jedynkę trygonometryczną. Jednak żaden z badanych nie zauważył tego faktu. Większość wypowiedzi podana była w postaci wzorów wyrażających zależności między długościami boków podstawy prostopadłościanu i funkcjami trygonometrycznymi rzutów danych kątów na tę płaszczyznę. W jednej z prac znalazł się następujący komentarz: *suma cosinusów kątów nie zależy od wymiarów prostokąta.* Odpowiedź ta jest błędna, ponieważ opuszczono w niej słowo „kwadratów”. Odnotujmy na koniec odpowiedź, w której jej autor nie rozumie pojęcia podobieństwa figur. Oto ta wypowiedź: *Suma kwadratów cosinusów ulegnie zmianie, jeżeli zwiększymy boki.*

Zadanie 3c) wymagało przeniesienia rozumowania z zadania 3a) z ostrosłupa o podstawie kwadratu na ostrosłup prawidłowy trójkątny. Dokonało tego jedynie 27% osób, które rozwiązały zadanie 3a). Osoby te prowadziły tu rozumowania analogiczne do rozważań prowadzonych w części a) zadania. Jak wspomniano wcześniej, część badanych pracujących nad częścią a) zadania 3 wyznaczając objętości ostrosłupów prawidłowych jako odpowiedź ostateczną uznało wyniki, w których objętość wyrażona była przez nieznane badanemu wielkości. Osoby te podobnie czyniły pracując nad zadaniem c), tj. próbowały uzależniać objętości od tych samych wielkości. Studenci niejako przenosili rozwiązania wypracowane w części a) zadania na zadanie 3c).

Należy tu również wspomnieć o grupie 5 osób ze starszych roczników studiów (III oraz V rok), którzy po poprawnym rozwiązaniu zadania 3a) w zadaniu 3c) nie wykonywali stosownych obliczeń, a jedynie pisali np.: *Objętość będzie się liczyć analogicznie, zmieni się tylko pole podstawy, kąt taki sam* albo *odpowiedź będzie taka sama, kąt zostanie taki sam.* Takie odpowiedzi badanych, pomimo iż błędne, świadczą naszym zdaniem o świadomości studentów, iż podczas rozwiązania zadania można i należy korzystać z wcześniej uzyskanych wyników. Jednocześnie stanowią one sygnał, że część studentów niejako „automatycznie" przenosi wypracowane w jednym konkretnym przypadku rozwiązanie na inne sytuacje.

## 4. Wnioski i hipotezy badawcze

Analiza uzyskanych wytworów działania studentów wskazała na dużą różnicę między liczbą poprawnie rozwiązanych zadań 1a), 2a) i 3a) a liczbą poprawnych odpowiedzi formułowanych przez studentów w rozwiązaniach pozostałych zadań. Zachodzi naturalne pytanie o przyczynę takiego stanu rzeczy. Czyżby studenci, mający być przyszłymi nauczycielami nie potrafili lub nie odczuwali potrzeby stawiania sobie różnych pytań i szukania odpowiedzi na te pytania?

S. Szuman (1985), badając rozwój pytań dziecka, stwierdził:

*Nasze życie jest jednym, nieustającym, nigdy nie kończącym się szeregiem pytań, które zadajemy w życiu. Prawdziwa wymiana pytań i odpowiedzi istnieje między małym dzieckiem a matką, między młodymi przyjaciółmi, którzy wspólnie dyskutują najistotniejsze zagadnienia rzeczywistości, między przewidującym marzeniem i marzycielskim planowaniem przyszłości a odpowiedzią losu życiowego doświadczenia, między niegasnącą nigdy ciekawością umysłu a nagromadzonym przez ludzkość materiałem wiedzy, między życzeniem a spełnieniem. Obserwując małe dzieci zauważamy, że zasypują one swych rodziców lub opiekunów szeregiem różnych pytań. Pytając: Co to? Co to jest?, dziecko spodziewa się dowiedzieć czegoś o przedmiocie lub zjawisku, którego nie zna. Zadając pytania: Jakie to jest?, Do czego to służy? Co jeszcze jest takie? pytający podmiot dąży do rozszerzenia swej wiedzy na dany temat. Formułując natomiast pytania typu: Czy to jest takie, a takie? Czy to się tłumaczy w ten sposób? osoba pytająca szuka potwierdzenia lub odrzucenia własnych stwierdzeń lub stawianych przez siebie hipotez.*

Wydaje się, że w podobnej sytuacji jest student podczas rozwiązywania wieloetapowych zadań. Badania nasze wskazują raczej na fakt, że badani nie wykazywali skłonności do zadawania sobie ani później eksperymentatorom wielu pytań związanych z zadaniami, które zaproponowano im do rozwiązania. Zastanawiające jest dlaczego tak się działo. Być może przyczyna tkwi w braku zainteresowania treścią zadań, ale może tkwić również w systemie edukacji, który nie sprzyja rozwijaniu uczenia problemowego na różnych szczeblach edukacji.

Zastanawiający wydaje się sposób formułowania przez studentów zaobserwowanych prawidłowości. Studenci matematyki powinni wiedzieć, że obserwowane prawidłowości są hipotezami matematycznymi. Powinny one być formułowane w postaci zdań, a nie formuł zdaniowych. Zważywszy na fakt, iż respondenci w większości mają być, albo już są nauczycielami matematyki, dość niepokojące jest często bezrefleksyjne podawanie samych tez bez założeń twierdzeń. W treści zadań nie zostało sformułowane wprost polecenie dotyczące podania zaobserwowanej prawidłowości w postaci twierdzenia, jednak ze względu na charakter kształcenia studentów w naszej uczelni taka postawa jest pożądana i oczekiwana.

Należy tu również zwrócić uwagę na sporą nieporadność językową, zarówno wśród osób rozpoczynających studia, jak i tych kończących edukację. Ujawniła się ona przede wszystkim w sposobie redagowania tekstu, jak również opisu prowadzonych rozumowań.

Wyniki badań wskazują również, że u wielu studentów nie zostały jeszcze ukształtowane różne aspekty matematycznej aktywności, a zwłaszcza umiejętność dostrzegania analogii, uogólniania i specyfikowania. Fakt ten wpływał prawdopodobnie hamująco na twórczą działalność badanych.

## Literatura

Gloton, R., Clero, C.: 1985, *Twórcza aktywność dziecka*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Major, J., Powązka, Z.: 2009, Finding properties of prisms and pyramids while solving stereometric problem, *Acta Mathematica* **12**, 215-220.

Major, J., Powązka, Z.: 2010a, From researces upon solving sterometric tasks by students, *Acta Mathematica* **13**, 139-144.

Major, J., Powązka, Z.: 2010b, Z badań nad kształtowaniem się u studentów matematyki pewnych aspektów matematycznej twórczości, *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki* **III**, 111-127.

*Mały Słownik języka polskiego*: 1982, PWN, Warszawa.

Reber, A. S., Reber, E. S.: 1981, *Słownik psychologii*, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa. Polskie wydanie pod redakcją prof. dr hab. I. Kurcz i prof. dr hab. K. Skarżyńskiej.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Szuman, S.: 1985, *Studia nad rozwojem psychicznym dziecka. Dzieła wybrane,* t. 1 (wyb. Przetacznikowa, M., Makiełło-Jarża, G.), WSiP, Warszawa.

*Instytut Matematyki*
*Uniwersytet Pedagogiczny*
*ul. Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*e-mail:* jmajor@up.krakow.pl
*e-mail:* powazka@ap.krakow.pl