FOLIA 82
Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia III (2010)

Antoni Chronowski

Propozycja wykładu na temat argumentu głównego liczb zespolonych*

Abstract. This article deals with some theorems on the principal argument of complex numbers. This paper is a framework of the lecture on the argument of complex numbers. Moreover, it presents some remarks on the formula which is used in the computer programme `DERIVE` and in the graphing calculators of type TI to calculate the arguments of complex numbers.

W podstawowej literaturze z algebry i analizy matematycznej (np. Gleichgewicht, 2000; Leja, 2006; Mostowski, Stark, 1970), w której rozważane są zagadnienia poświęcone liczbom zespolonym, nie ma kompleksowego opracowania pojęcia argumentu liczb zespolonych. Z moich doświadczeń wynika, że studiujący teorię liczb zespolonych mają trudności w ustaleniu argumentu głównego liczb zespolonych, szczególnie wtedy, gdy zachodzi potrzeba wykorzystania w tym celu funkcji cyklometrycznych.

W tym artykule opracowane są twierdzenia pozwalające wyrazić argument główny liczb zespolonych za pomocą funkcji cyklometrycznych. Wyjaśniony i udowodniony jest również wzór (twierdzenie) stosowany w programie komputerowym `DERIVE` i kalkulatorach graficznych typu TI do obliczania argumentów głównych liczb zespolonych.

Artykuł jest propozycją wykładu o argumencie głównym liczb zespolonych w ramach tematyki: „Ciało liczb zespolonych".

1. Argument główny liczby zespolonej

Symbolem $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

W tym artykule będziemy korzystać z funkcji cyklometrycznych:

$$\begin{gathered} \arcsin x,\ x \in [-1, 1], \\ \arccos x,\ x \in [-1, 1], \\ \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}, \end{gathered}$$

*A proposal of a lecture on the principal argument of complex numbers jako funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} \sin x,\ & x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\ \cos x,\ & x \in [0, \pi], \\ \operatorname{tg} x,\ & x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \\ \operatorname{ctg} x,\ & x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

W literaturze matematycznej (np. Gleichgewicht, 2000; Leja, 2006), w rozdziałach dotyczących liczb zespolonych można spotkać dwie różne definicje argumentu głównego liczby zespolonej:

DEFINICJA 1.1
Argumentem głównym niezerowej liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\varphi \in [0, 2\pi)$ taką, że

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

DEFINICJA 1.2
Argumentem głównym niezerowej liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\psi \in (-\pi, \pi]$ taką, że

$$\cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i} \quad \sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Argument główny niezerowej liczby zespolonej z oznaczamy symbolem $\arg z$.

Najpierw podamy i udowodnimy twierdzenia o argumentach głównych liczb zespolonych w sensie definicji 1.1.

TWIERDZENIE 1.3
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(a) $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$*;*

(b) $\varphi = \pi - \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$*;*

(c) $\varphi = 2\pi + \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(a) Niech $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Wówczas

$$\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(b) Niech $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - \pi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego
$$\sin(\varphi - \pi) = -\sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
czyli
$$\sin(\varphi - \pi) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
Zatem
$$\varphi - \pi = \arcsin\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
Ponieważ funkcja arcsin jest nieparzysta, więc
$$\varphi = \pi - \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(c) Niech $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas
$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - 2\pi < 0.$$
Wobec tego
$$\varphi - 2\pi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
czyli
$$\varphi = 2\pi + \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Twierdzenie 1.4
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:
(a) $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$*;*
(b) $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $\pi < \varphi < 2\pi$*.*

Dowód. Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że
$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(a) Niech $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Wówczas
$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(b) Niech $\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas
$$0 < \varphi - \pi < \pi.$$
Wobec tego
$$\cos(\varphi - \pi) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

czyli

$$\cos(\varphi - \pi) = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zatem

$$\varphi - \pi = \arccos \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ponieważ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, więc

$$\varphi = 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

TWIERDZENIE 1.5
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(A) *Jeżeli $a = 0$, to* $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ gdy } b > 0, \\ \frac{3}{2}\pi, \text{ gdy } b < 0; \end{cases}$

(B) *Jeżeli $a \neq 0$, to:*
   (a) $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$*;*
   (b) $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$*;*
   (c) $\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Dowód warunku (A) jest oczywisty.

Udowodnimy warunek (B). Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

(a) Jeżeli $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, to

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

(b) Niech $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - \pi < \frac{\pi}{2}.$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg}(\varphi - \pi) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

a więc

$$\varphi - \pi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

czyli

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

(c) Niech $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi - 2\pi < 0.$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg}(\varphi - 2\pi) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

a więc

$$\varphi - 2\pi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

czyli

$$\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

TWIERDZENIE 1.6

Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(A) *Jeżeli $b = 0$, to* $\varphi = \begin{cases} 0, & gdy\ a > 0, \\ \pi, & gdy\ a < 0; \end{cases}$

(B) *Jeżeli $b \neq 0$, to:*

(a) $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$, *gdy* $0 < \varphi < \pi$;

(b) $\varphi = \pi + \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$, *gdy* $\pi < \varphi < 2\pi$.

Dowód. Dowód warunku (A) jest oczywisty.

Udowodnimy warunek (B). Z określenia argumentu głównego niezerowej liczby zespolonej wynika, że

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b}.$$

(a) Jeżeli $0 < \varphi < \pi$, to

$$\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}.$$

(b) Niech $\pi < \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$0 < \varphi - \pi < \pi.$$

Wobec tego

$$\operatorname{ctg}(\varphi - \pi) = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b},$$

a więc

$$\varphi - \pi = \operatorname{arcctg}\frac{a}{b},$$

czyli

$$\varphi = \pi + \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}.$$

Następnie podamy twierdzenia o argumentach głównych, w sensie definicji 1.2, liczb zespolonych. Pomijamy dowody tych twierdzeń, gdyż są analogiczne do dowodów poprzednich twierdzeń.

Twierdzenie 1.7
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(a) $\psi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$;

(b) $\psi = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \pi$;

(c) $\psi = -\pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2}$.

Twierdzenie 1.8
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(a) $\psi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$;

(b) $\psi = -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *gdy* $-\pi < \psi < 0$.

Twierdzenie 1.9
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(A) *Jeżeli* $a = 0$, *to* $\psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ gdy } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ gdy } b < 0; \end{cases}$

(B) *Jeżeli* $a \neq 0$, *to:*

(a) $\psi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$;

(b) $\psi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \pi$;

(c) $\psi = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, *gdy* $-\pi < \psi < -\frac{\pi}{2}$.

Twierdzenie 1.10
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(A) *Jeżeli* $b = 0$, *to* $\psi = \begin{cases} 0, \text{ gdy } a > 0, \\ \pi, \text{ gdy } a < 0; \end{cases}$

(B) *Jeżeli* $b \neq 0$, *to:*

(a) $\psi = \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}$, *gdy* $0 < \psi < \pi$;

(b) $\psi = -\pi + \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}$, *gdy* $-\pi < \psi < 0$.

2. Obliczanie argumentu głównego liczby zespolonej za pomocą programu komputerowego `DERIVE` lub kalkulatorów graficznych typu TI

`DERIVE`

Funkcja standardowa `PHASE (z)` w programie `DERIVE` lub opcja `angle` w kalkulatorach graficznych typu TI (np. TI-92) podają wartość argumentu ψ liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $b \neq 0$, w postaci wzoru, który w symbolice stosowanej w polskiej literaturze matematycznej można zapisać następująco:

$$\psi = -\mathrm{arctg}\frac{a}{b} + \mathrm{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Poniższe twierdzenie i jego dowód wyjaśniają sposób obliczania argumentu liczby zespolonej za pomocą podanego wzoru.

TWIERDZENIE 2.1
Jeżeli $z = a + bi$ jest niezerową liczbą zespoloną, to argument główny $\psi \in (-\pi, \pi]$ liczby zespolonej z wyznaczony jest za pomocą następujących warunków:

(a) *Jeżeli $b = 0$, to* $\psi = \begin{cases} 0, & \textit{gdy } a > 0, \\ \pi, & \textit{gdy } a < 0; \end{cases}$

(b) *Jeżeli $b \neq 0$, to*

$$\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} + \mathrm{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dowód. Dowód warunku (a) jest oczywisty.

W dowodzie warunku (b) wykorzystamy równość:

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Ponieważ $b \neq 0$, więc $0 < \psi < \pi$ lub $-\pi < \psi < 0$. Zakładamy najpierw, że $0 < \psi < \pi$. Wówczas $b > 0$, czyli $\mathrm{sgn}(b) = 1$. Z warunku (a) w twierdzeniu 1.10 wynika, że

$$\psi = \mathrm{arcctg}\,\frac{a}{b}.$$

Ponieważ $\mathrm{arcctg}\,\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{a}{b}$ na mocy równości (1), więc

$$\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} + \frac{\pi}{2},$$

czyli

$$\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} + \mathrm{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Następnie zakładamy, że $-\pi < \psi < 0$. Wówczas $b < 0$, czyli $\mathrm{sgn}(b) = -1$. Z warunku (b) w twierdzeniu 1.10 wynika, że

$$\psi = -\pi + \mathrm{arcctg}\,\frac{a}{b}.$$

Stosując równość (1), otrzymujemy:

$$\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} - \frac{\pi}{2},$$

czyli

$$\psi = -\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} + \mathrm{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Literatura

Gleichgewicht, B.: 2000, *Algebra*, PWN, Warszawa.

Leja, F.: 2006, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa.

Mostowski, W., Stark, M.: 1970, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@up.krakow.pl