FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.3

Barbara Pieronkiewicz

Różne reprezentacje liczb rzeczywistych*

Abstract. This article is devoted to the different representations of real numbers. In particular, the following types are distinguished and discussed: (1) representations based on theorems referring to the axiomatic characterization of the field of real numbers, (2) genetic representations – related to the construction of real numbers, (3) visual representations – mainly related to the geometrical way of presenting numbers. The paper addresses different representations of real numbers from a higher standpoint as well as from a classroom perspective.

1. Termin „reprezentacja" w literaturze z zakresu dydaktyki matematyki

Przez reprezentację Goldin (2002) rozumie „konfigurację, która może reprezentować coś innego w pewien sposób" (s. 208). Na przykład słowo może odnosić się do rzeczywistego przedmiotu, liczebnik może służyć do określenia liczby elementów zbioru, ten sam liczebnik może też wskazywać na położenie punktu na osi liczbowej.

System reprezentacji tworzą *składniki pierwotne* – znaki, którym przypisuje się pewne znaczenie, *konfiguracje znaków* – czyli możliwe kombinacje pierwotnych komponentów, oraz *złożone struktury* – obejmujące sieci wzajemnych powiązań między reprezentacjami razem z regułami logiczno-językowymi i relacjami pomiędzy reprezentacjami, które te sieci tworzą.

Lesh, Behr, Post (1987a) wyróżnili pięć rodzajów systemu reprezentacji:

- „skrypty" oparte na doświadczeniu – obejmują wiedzę, dla której kontekstem umożliwiającym interpretację i rozwiązywanie problemów są sytuacje realne,

*The different representations of real numbers

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97F50; Secondary: 11A67
Key words and phrases: real numbers, number representations, transparent representation

- modele manipulacyjne – są to często materiały ustrukturyzowane, których elementy same w sobie mają niewielkie znaczenie (np. klocki Cuisenaire'a, koła ułamkowe), natomiast są nośnikami pewnych głębszych idei, ukazują w przystępny i obrazowy sposób, a także pozwalają poznać i zrozumieć strukturę matematycznych pojęć,
- rysunki i wykresy – statyczne modele poglądowe wpływające na kształtowanie się w umyśle ucznia obrazów pojęć,
- zapis symboliczny – który, podobnie jak język, tworzony jest według pewnych ustalonych reguł, składa się z symboli i wyrażeń właściwych dla danego (tutaj: matematycznego) języka,
- język mówiony.

Matematyczne reprezentacje nie występują w izolacji, bowiem zawsze stanowią część szerszego systemu. Zrozumienie reprezentacji jest zatem możliwe tylko w obrębie tego systemu, w którym ona występuje, bowiem to w nim ustalone są znaczenia poszczególnych komponentów i utrwalone są pewne konwencje (Goldin, Shteingold, 2001).

Różne reprezentacje obiektów matematycznych i relacje pomiędzy nimi powstają i utrwalają się w czasie, przechodząc nierzadko długą drogę od indywidualnych inwencji, aż po przyjęcie ich jako swego rodzaju konwencji przez daną społeczność (por. Zazkis, 2016; Kontorovich, Zazkis, 2017). Konwencje zaś tworzą system normatywny umożliwiający członkom danej społeczności porozumiewanie się ze sobą.

Reprezentacje czynią abstrakcyjne pojęcia matematyczne poznawczo dostępnymi dla uczących się. Można powiedzieć, że rozwijanie kompetencji matematycznych jednostki jest ściśle związane z nabieraniem przez nią biegłości w interpretowaniu, efektywnym posługiwaniu się reprezentacjami pojęć matematycznych oraz tworzeniu własnych reprezentacji. Wymienić należy tutaj kilka elementów kluczowych dla rozwoju myślenia matematycznego i matematycznej sprawności:

- znajomość i rozumienie różnych reprezentacji danego pojęcia,
- dostrzeganie związków pomiędzy różnymi reprezentacjami tego samego pojęcia (także różnic i podobieństw),
- umiejętność przechodzenia od jednej reprezentacji danego pojęcia do innej,
- świadomość, że nie można reprezentacji abstrakcyjnego pojęcia utożsamiać z samym pojęciem.

W szczególności, stosowanie różnych reprezentacji tego samego pojęcia umożliwia spojrzenie nań z różnych perspektyw poznawczych (Tripathi, 2008).

W polskiej literaturze z zakresu dydaktyki matematyki, stosowanie terminu „reprezentacja" zostało w dużej mierze ukształtowane przez podejście Brunera, który określił reprezentację (także system reprezentacji) jako „zbiór reguł, w kategoriach których jednostka tworzy sobie pojęcie stałości zdarzeń, z jakimi się zetknęła" (za: Semadeni, 1982, s. 165). Do podstawowych rodzajów reprezentacji zwykło się za autorem zaliczać reprezentacje: enaktywną, ikoniczną i symboliczną. Pierwsza z nich to reprezentacja „odtwarzająca”, obejmująca zbiór działań prowadzących do osiągnięcia zamierzonego rezultatu. Stanowi wiedzę o czymś zawartą i wyrażającą się w umiejętności robienia czegoś. Druga oznacza zbiór obrazów powstałych w drodze czasowej, przestrzennej i jakościowej strukturalizacji spostrzeżeń i wyobrażeń dotyczących danego pojęcia. Reprezentacja symboliczna zaś (np. opis słowny, formuła matematyczna) wymaga znajomości i rozumienia pewnego języka, w tym podstaw stosowanego kodu symbolicznego oraz reguł tworzenia i przekształcania zakodowanych wypowiedzi. Semadeni (1982) zwraca również uwagę na to, że źródłem reprezentacji ikonicznych mogą być zarówno reprezentacje enaktywne – wówczas obraz stanowi schemat organizacji działania, jak i symboliczne – gdy obraz reprezentuje treści podane wcześniej w formie kodu symbolicznego. Reprezentacje te nazywa się odpowiednio ikoniczno-enaktywnymi i ikoniczno-symbolicznymi.

Według Pape, Tchoshanov (2001) w kontekście matematyki termin reprezentacja odnosi się zarówno do zewnętrznych, jak i wewnętrznych przejawów pojęć matematycznych. *Reprezentacje zewnętrzne* (Janvier, Girardon, Morand, 1993; Goldin, 2002) to te, które można zobaczyć, które istnieją poza człowiekiem. Będą to więc na przykład konkretne obiekty do manipulacji (modele enaktywne), wizualizacje np. rysunki, wykresy itp. (modele ikoniczne) oraz obiekty abstrakcyjne, takie jak wyrażenia algebraiczne czy wzory (modele symboliczne). *Reprezentacje wewnętrzne* zaś stanowią zinternalizowane obrazy matematycznych idei, schematy poznawcze tworzone przez jednostkę w trakcie nabywania doświadczeń matematycznych. Na ten rodzaj reprezentacji zwraca uwagę Siwek (2005), przyjmując, że reprezentacje to „systemy przedstawiania i przetwarzania informacji (schematy, reguły, kody), które powstają w umyśle ucznia w wyniku rozmaitych czynności, które on wykonuje (konkretnych, wyobrażeniowych, abstrakcyjnych)” (s. 56).

Istotnego podziału reprezentacji dokonali Lesh, Behr i Post (1987b), wyróżniając reprezentację transparentną (ang. *transparent*) oraz nieprzejrzystą lub też nietransparentną (ang. *opaque*).

Reprezentacja transparentna to zdaniem autorów ta, która jest jednoznacznym nośnikiem wyłącznie tej idei lub struktury, którą reprezentuje. *Reprezentacja nieprzejrzysta* (nietransparentna) zaś podkreśla pewne aspekty danej idei lub struktury, inne natomiast ukrywa. Sama w sobie reprezentacja może posiadać własności wykraczające poza te, które są właściwe zagnieżdżonym w niej ideom lub strukturom, jak również może nie posiadać pewnych własności tychże idei lub struktur.

Zazkis i Gadowsky (2001), prowadząc badania z zakresu teorii liczb, zmodyfikowały podział zaproponowany w pracy Lesha, Behra, Posta (1987b), formułując bardziej precyzyjne pojęcie *względnej transparentności reprezentacji* (por. Zazkis, Sirotic, 2010). Zdaniem autorek wszystkie reprezentacje liczb są nieprzejrzyste, gdyż uwypuklając pewne aspekty danej liczby, ukrywają inne. Przykładowo: przedstawienie liczby 576 jako 24^2 podkreśla, że liczba 576 jest kwadratem pewnej liczby naturalnej, natomiast nie ujawnia tego, że jest ona podzielna przez 192. Przedstawienie tej samej liczby jako $23 \cdot 25 + 1$ podkreśla, że liczba 576 przy dzieleniu przez 23 daje resztę 1, natomiast w żaden sposób nie ukazuje tego, że jest ona podzielna przez 16.

Autorki, postulując uwzględnianie relatywnego charakteru reprezentacji, proponują mówić *o transparentności reprezentacji* (np. liczby) *ze względu na pewną własność*, jeżeli ta własność jest widoczna (ujawnia się) lub może zostać wyprowadzona wprost z danej reprezentacji. Oto przykład zaprezentowany przez R. Zazkis w trakcie wykładu wygłoszonego podczas kongresu ICME 13 (Hamburg, 2016):

Jakie własności liczb a, b, c, d oraz e ujawniają ich reprezentacje?

$$a = 216^2$$
$$b = 36^3$$
$$c = 3 \cdot 15552$$
$$d = 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43 + 1$$
$$e = 12 \cdot 3000 + 12 \cdot 888$$

Z łatwością zauważymy, że liczba a jest kwadratem pewnej liczby naturalnej i jest podzielna przez 216, liczba b jest z kolei sześcianem pewnej liczby naturalnej i z pewnością dzieli się przez 36. Z reprezentacji liczby c możemy wnioskować o jej podzielności przez 2 i 3, a zatem również przez 6, podobnie jak w przypadku liczby e zauważymy od razu, że dzieli się ona przez 12, ale też 3, 4, 6 i 24. O liczbie d powiemy od razu, że w wyniku jej dzielenia przez 5, 7, 31 lub 43 otrzymamy resztę 1. Powyższe reprezentacje nie pozwalają nam jednak od razu stwierdzić, że $a = b = c = d = e$.

Podobnie możemy rozważyć reprezentacje zbiorów liczb transparentne ze względu na spełnianie przez ich elementy pewnych warunków. Przykładowo: zbiór $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ oznacza zbiór liczb parzystych, zbiór $\{17k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$ oznacza zbiór liczb całkowitych, które przy dzieleniu przez 17 dają resztę 2, zaś $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ zbiór kwadratów liczb naturalnych. Dzięki możliwości podania ogólnego wzoru liczb należących do danego zbioru, możemy efektywnie działać na jego dowolnych elementach. Z łatwością, bez sprawdzania na konkretnych przykładach, odpowiemy na pytania czy suma dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą, jaką resztę z dzielenia przez 17 da nam iloczyn dwóch liczb, które przy dzieleniu przez 17 dają resztę 2 albo jaką liczbą jest różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Pojęcie względnej transparentności okazało się niezwykle użyteczne dla zrozumienia trudności doświadczanych przez przyszłych nauczycieli matematyki, podczas rozwiązywania problemów związanych z liczbami pierwszymi. Zazkis i Liljedahl (2004) zauważyli, że nie istnieje żaden transparentny sposób przedstawienia liczby pierwszej. Brak istnienia transparentnej reprezentacji liczby pierwszej może być zdaniem autorów źródłem trudności w traktowaniu liczb pierwszych jako obiektów, które można przekształcać i na których można działać.

Przykłady względnie transparentnych reprezentacji można także znaleźć w odniesieniu do innych zagadnień. Rozważmy trzy różne postaci wzoru tej samej funkcji kwadratowej:

$$f_1(x) = -2x^2 - 4x + 6$$
$$f_2(x) = -2(x + 1)^2 + 8$$
$$f_3(x) = -2(x - 1)(x + 3)$$

Z każdego z podanych wzorów możemy od razu odczytać informację, że ramiona paraboli, będącej wykresem danej funkcji, będą skierowane w dół. Z postaci wzoru funkcji f_1 możemy dodatkowo odczytać, że punkt przecięcia paraboli z osią Oy będzie miał współrzędne $(0, 6)$. Postać wzoru funkcji f_2 pozwala bez zbędnych obliczeń podać współrzędne wierzchołka paraboli $(-1, 8)$, zaś w ostatnim wzorze zauważamy od razu miejsca zerowe funkcji (1 oraz -3). Nie widać jednak od razu, że wszystkie te wzory opisują tę samą funkcję.

Spójrzmy także na podane niżej wzory funkcji: wykładniczej f i logarytmicznej g:

$$f(x) = 2^x \qquad f_1(x) = 8 \cdot 2^x \qquad f_2(x) = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$$

oraz

$$g(x) = \log_2 x \qquad g_1(x) = \log_2(8x) \qquad g_2(x) = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$$

Oczywiście $f_1 = f_2$. Oba wyrażenia algebraiczne użyte do zapisania wzorów f_1 oraz f_2 są transparentne ze względu na przekształcenie, w wyniku którego wykresy tych funkcji można uzyskać z wykresu funkcji f. Jednak o ile w przypadku f_1 postać wzoru przywołuje na myśl powinowactwo prostokątne względem osi Ox, reprezentacja f_2 pozwala od razu dostrzec translację o wektor $[-3, 0]$.

Podobnie będzie w przypadku podanych wzorów funkcji logarytmicznej. Jak należy przekształcić wykres funkcji g, by otrzymać wykresy funkcji g_1 i g_2? Tutaj również $g_1 = g_2$, jednak wyrażenie algebraiczne użyte do zapisania wzoru funkcji g_1 wskazuje wyraźnie na powinowactwo prostokątne względem osi Oy, zaś wyrażenie zastosowane we wzorze na g_2, wskazuje na translację o wektor $[0, 3]$. W każdym z przywołanych przypadków, zestawienie obu reprezentacji pozwala uzyskać pełniejszy obraz podanej funkcji i wzbogaca wiedzę uczących się.

Wydaje się, że transparentność reprezentacji pojęć matematycznych jest istotnie pojęciem względnym. Podczas analizy danej reprezentacji w pełni uzasadnione jest pytanie *dla kogo* jest ona transparentna, a dla kogo nie, *dlaczego* jest transparentna lub nie i wreszcie o transparentności *ze względu na jaki aspekt* dla danego pojęcia mówimy. Refleksja nad zagadnieniem transparentności reprezentacji może nas doprowadzić do zaskakującej konkluzji, że choć termin „reprezentacja transparentna” powołuje do życia pewną klasę reprezentacji, klasa ta zdaje się pusta. Dlatego w dalszych rozważaniach, tam gdzie to istotne, uwaga Czytelnika kierowana będzie nie na transparentność jako taką, ale na transparentność ze względu na pewne wskazane własności.

2. Charakterystyka (zbioru) liczb rzeczywistych z „wyższego stanowiska”

Zanim przejdziemy do szkolnego ujęcia liczb rzeczywistych, warto spojrzeć na nie z tzw. „wyższego stanowiska” i dokonać przeglądu wybranych reprezentacji liczb rzeczywistych stanowiących przedmiot badań matematyki wyższej. Naturalnie, ze względu na obszerność zagadnienia i konieczną zwięzłość narzuconą przez ramy artykułu, ograniczę przegląd do wybranych reprezentacji. Kryterium, według którego chcę wyróżnić pewne reprezentacje jest dla mnie sposób wprowadzania (zbioru) liczb rzeczywistych, a także sposób, w jaki możemy myśleć o liczbach rzeczywistych, chcąc odpowiedzieć na pytania: „czym jest zbiór liczb rzeczywistych?” oraz „czym są liczby rzeczywiste?”. W tym celu wyróżniam trzy odmienne w swej naturze charakterystyki zbioru liczb rzeczywistych (Tabela 1):

- **Aksjomatyczna** – w tym ujęciu uporządkowane ciało liczb rzeczywistych zdefiniowane jest przez podanie grupy aksjomatów, liczby rzeczywiste to elementy tak określonego ciała;
- **Genetyczna** – ta charakterystyka związana jest z konstrukcją liczb rzeczywistych przez rozszerzenie zbioru liczb wymiernych; wyróżnić tu można zarówno konstrukcję całego zbioru, jak i możliwość skonstruowania poszczególnych liczb rzeczywistych (np. konstrukcje Cantora, Dedekinda i Hoborskiego);
- **Poglądowa** – charakterystyka związana z reprezentacjami graficznymi, w których rysunek pełni rolę wysoce sugestywnego nośnika pojęcia lub struktury matematycznej; wspiera kształtowanie intuicji (zbioru) liczb rzeczywistych.

Tabela 1. Trzy rodzaje charakterystyki (zbioru) liczb rzeczywistych

<table>
<tr><th colspan="3">Charakterystyka (zbioru) liczb rzeczywistych</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aksjomatyczna</td><td>aksjomaty ciała uporządkowanego $(\mathbb{R}, <)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Genetyczna</td><td>konstrukcja liczb rzeczywistych i zbioru $\mathbb{R}$</td><td>konstrukcja zbioru $\mathbb{R}$ jako struktury ilorazowej Cantora</td></tr>
<tr><td>konstrukcja liczb rzeczywistych</td><td>konstrukcja liczb rzeczywistych Dedekinda
konstrukcja liczb rzeczywistych Hoborskiego</td></tr>
<tr><td colspan="2">Poglądowa</td><td>tzw. aksjomat Cantora-Dedekinda</td></tr>
</table>

3. Aksjomatyczna charakterystyka zbioru liczb rzeczywistych

W sensie matematycznym jest to pierwotna charakterystyka zbioru liczb rzeczywistych, z niej bowiem można wyprowadzić twierdzenia[1] stanowiące podstawę do tworzenia reprezentacji poszczególnych liczb rzeczywistych.

Pierwsza aksjomatyczna charakterystyka ciała liczb rzeczywistych została podana przez D. Hilberta w 1900 roku[2]. Przeszła ona długa drogę, by przyjąć postać w jakiej najczęściej jest podawana współcześnie (aksjomaty ciała uporządkowanego oraz aksjomat ciągłości).

[1] W dalszej części artykułu wybrane twierdzenia albo zostaną podane wprost, albo istnienie odpowiednich twierdzeń będzie zasygnalizowane. Twierdzenia nie będą jednak wyprowadzane z aksjomatów ciała uporządkowanego liczb rzeczywistych, gdyż zagadnienie to znacznie wykracza poza ramy tego artykułu.

[2] Mowa o artykule *Über den Zahlbergriff* dołączonym jako dodatek do książki *Grundlagen der Geometrie*. Wcześniej znano już m.in. aksjomaty Peano zbioru liczb naturalnych (1889) oraz aksjomatyczne ujęcie arytmetyki liczb zespolonych Huntingtona. Szerzej na ten temat pisze Błaszczyk (2007, 2010, 2012).

Przyjmujemy następujące pojęcia pierwotne:

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
0 oraz 1 – liczby rzeczywiste
” + ” oraz $\cdot$ – działania dodawania i mnożenia
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
” – ” operacja brania elementu przeciwnego
$<$ – relacja mniejszości

Aksjomaty ciała liczb rzeczywistych są następujące:

Tabela 2. Aksjomatyka ciała liczb rzeczywistych

Aksjomaty ciała uporządkowanego	**Aksjomaty ciała przemiennego**	
	Przemienność dodawania	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x + y = y + x$
	Przemienność mnożenia	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x \cdot y = y \cdot x$
	Łączność dodawania	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x + (y + z) = (x + y) + z$
	Łączność mnożenia	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
	Rozdzielność mnożenia względem dodawania	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
	Istnienie elementu neutralnego dodawania	$\exists\, 0 \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R}\, x + 0 = x$
	Istnienie elementu neutralnego mnożenia	$\exists\, 1 \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R}\, x \cdot 1 = x$
	Istnienie elementów przeciwnych	$\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R}\, x + (-x) = 0$
	Istnienie elementów odwrotnych	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in \mathbb{R}\, x \cdot x^{-1} = 1$
	Aksjomaty porządku	
	Prawo trychotomii	$\forall x, y \in \mathbb{R}\, [x \neq y \Rightarrow x < y \vee x > y]$
	Przechodniość relacji mniejszości	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\, [x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$
	Monotoniczność dodawania[3]	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\, [x < y \Rightarrow x + z < y + z]$
	Monotoniczność mnożenia[4]	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\, [x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z]$
Aksjomat ciągłości (podajemy go tutaj w dwóch wersjach[5])		
	Każdy niepusty, ograniczony z góry (z dołu) podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $M = \sup A \in \mathbb{R}$ (dolny $m = \inf A \in \mathbb{R}$).	

[3] Mowa o monotoniczności funkcji $f(x) = x + a$

[4] Mowa o monotoniczności funkcji $f(x) = ax$

[5] Inne, równoważne sformułowanie można otrzymać, stosując przekroje Dedekinda, o których mowa jest dalej. W pracy (Błaszczyk, 2012) podanych jest sześć wersji aksjomatu ciągłości.

Układ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ nazywamy **uporządkowanym ciałem liczb rzeczywistych**.

Można pokazać (Cohen, Ehrlich, 1963), że istnieje (z dokładnością do izomorfizmu) dokładnie jedna struktura spełniająca wszystkie powyższe aksjomaty. Z podanych wyżej aksjomatów oraz z istnienia co najmniej dwóch różnych liczb należących do $\mathbb{R}$ można wyprowadzić wszystkie znane nam twierdzenia dotyczące liczb rzeczywistych, w szczególności szkolne reguły działań arytmetycznych. Wybrane twierdzenia zostaną przedstawione w dalszej części.

Inny układ aksjomatów zbioru liczb rzeczywistych[6] zaproponował Alfred Tarski (1994). Pojęciami pierwotnymi w jego pierwszej aksjomatyce są $\mathbb{R}$, $<$, $+$ oraz 1. Przy tych samych oznaczeniach, aksjomaty Tarskiego są następujące:

Tabela 3. Aksjomatyka liczb rzeczywistych wg A. Tarskiego

Aksjomaty porządku	Jeśli $x \neq y$ to $x < y$ lub $y < x$
	Relacja „<” jest relacją asymetryczną
	Jeśli $x < z$, to istnieje taka liczba y, że $x < y$ i $y < z$
	Jeśli X i Y to dowolne zbiory liczb rzeczywistych spełniające warunek: dla dowolnego $x \in X$ oraz dowolnego $y \in Y$: $x < y$ to istnieje liczba z taka, że jeśli $x \neq z$ oraz $y \neq z$ to $x < z < y$
Aksjomaty dodawania	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ x + (y + z) = (x + y) + z$
	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ x + z = y$
	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ [x + y < z + w \Rightarrow x < z \vee y < w]$
Aksjomaty jedności	$1 \in \mathbb{R}$
	$1 < 1 + 1$

Jak łatwo zauważyć, w powyższych aksjomatach nie występuje mnożenie. Da się jednak pokazać (Tarski, Givant, 1987), że jego istnienie można wyprowadzić z tych aksjomatów, a wraz z dodawaniem spełnia ono aksjomaty ciała.

Minimalizm pierwszej aksjomatyki Tarskiego oraz prostota przyjętych założeń przyczyniły się jednak do znacznej komplikacji wywodów prowadzonych w oparciu o nią. Druga aksjomatyka zaproponowana przez Tarskiego, uzupełniona jest o dwa terminy pierwotne (0 oraz działanie mnożenia) i obejmuje aż dwadzieścia aksjomatów (patrz: Tarski, 1994).

4. Genetyczna charakterystyka zbioru liczb rzeczywistych

Przez analogię do pojęcia *definicji genetycznej*, która określa czynności jakie należy wykonać, aby skonstruować dany obiekt (Nowak, 1989, s. 258), mówiąc o charakterystyce genetycznej, będę mieć na myśli konstrukcje prowadzące do stworzenia (zbioru) liczb rzeczywistych. Różne sposoby konstruowania liczb rzeczywistych mogą wskazywać na ich różne aspekty.

[6] W istocie, aksjomaty Tarskiego odnoszą się do ciał rzeczywiście domkniętych.

4.1. Konstrukcja Cantora – liczba rzeczywista jako klasa abstrakcji relacji współzbieżności ciągów podstawowych

Przypomnijmy na początku kilka pojęć.

Definicja 1
Każdą funkcję $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Q}$ nazywamy ciągiem wymiernym.

Definicja 2
Ciągiem spełniającym warunek Cauchy'ego (lub: ciągiem podstawowym) nazywamy ciąg wymierny taki, że:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \, \exists k \in \mathbb{N}_1 \forall m, n \in \mathbb{N}_1 \, [m, n \geq k \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon].$$

Oznaczmy przez F zbiór wszystkich ciągów spełniających warunek Cauchy'ego. W zbiorze tym określmy następującą relację:

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Relacja ta, zwana relacją współzbieżności ciągów, jest relacją równoważności ciągów podstawowych i wyznacza w zbiorze F klasy abstrakcji (por. Chronowski, 1997, 1999).

Definicja 3
Każdą klasę abstrakcji relacji $\sim$ w zbiorze ciągów podstawowych nazywamy liczbą rzeczywistą.

Liczbę rzeczywistą $[(a_n)]$ taką, że $\lim\limits_{n\to\infty} = a \in \mathbb{Q}$ nazwiemy *liczbą wymierną*, zaś przez *liczbę niewymierną* będziemy rozumieć taką liczbę rzeczywistą $[(b_n)]$, która nie jest wymierna.

Definicja 4
Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$ w zbiorze F. Zbiór liczb rzeczywistych jest zatem zbiorem ilorazowym:

$$\mathbb{R} = \mathbb{F}/_{\sim}$$

Ten sposób konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych został podany w 1872 roku przez George'a Cantora w pracy *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.

4.2. Konstrukcja Dedekinda – liczba rzeczywista jako przekrój (A, B) zbioru liczb wymiernych

Inny sposób konstrukcji liczb rzeczywistych zaproponował Richard Dedekind (1872) w pracy *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Ponieważ konstrukcja ta przebiega w zbiorze liczb wymiernych, przypomnimy najpierw w jaki sposób konstruowane są właśnie te liczby, a następnie podamy definicję przekroju Dedekinda dla zbioru liniowo uporządkowanego (np. $\mathbb{Q}$).

W zbiorze $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ określamy następującą relację R:

$$< a, b > R < c, d > \Leftrightarrow (a \cdot d = b \cdot c).$$

Relacja R jest relacją równoważności wprowadzającą w zbiorze $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ klasy abstrakcji. Klasę abstrakcji danej pary $< a, b >$ tworzą wszystkie pary, w których iloraz pierwszego elementu przez drugi jest równy ilorazowi a przez b.

Klasy abstrakcji wyznaczone przez relację R w zbiorze $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ nazywamy liczbami wymiernymi.

Definicja 5
Przekrojem Dedekinda zbioru liniowo uporządkowanego $(X, <)$ nazywamy każdą parę (A, B) podzbiorów zbioru X taką, że:

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = X$
3. *dla każdego* $a \in A$, $b \in B$ $a < b$.

Zbiór A nazywa się klasą dolną, zaś B klasą górną przekroju (A, B).

Rozważając przekroje zbioru X możemy mieć do czynienia z jedną z następujących sytuacji:

1. W zbiorze A istnieje element największy, a w zbiorze B istnieje element najmniejszy – powiemy wówczas, że obie klasy przekroju są domknięte, a przekrój (A, B) wyznacza **skok**.

Przykład 1
$X = \mathbb{Z}$, $A = (-\infty, 2 > \cap\, \mathbb{Z}$, $B = < 3, +\infty) \cap \mathbb{Z}$.

Zauważmy, że w zbiorze uporządkowanym w sposób gęsty, żaden przekrój nie może wyznaczać skoku. W zbiorze takim natomiast możemy powiedzieć, że każdy przekrój jest jednoznacznie wyznaczony przez klasę dolną (lub górną), co widać w kolejnych dwóch przykładach.

2. W zbiorze A istnieje element największy x, zaś w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy – wówczas przekrój **wyznaczony jest przez liczbę** x. Klasę dolną takiego przekroju nazywamy klasą domkniętą. Przekroje tego typu, w których klasa górna nie ma liczby najmniejszej nazywamy dodatkowo **przekrojami unormowanymi**.

Przykład 2
$X = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 2 >$, $B = (2, +\infty)$.

3. W zbiorze A nie istnieje element największy zaś w zbiorze B istnieje element najmniejszy y – wtedy przekrój **wyznaczony jest przez liczbę** y. Klasę górną takiego przekroju nazywamy klasą domkniętą.

Przykład 3
$X = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 2)$, $B = < 2, +\infty)$.

4. W zbiorze A nie istnieje element największy, a w zbiorze B nie istnieje element najmniejszy – powiemy wtedy, że żadna z klas przekroju nie jest domknięta, a przekrój (A, B) wyznacza **lukę**.

Przykład 4
$X = \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$, $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Liczbami rzeczywistymi będziemy nazywać przekroje Dedekinda zbioru liczb wymiernych. Przekroje typu 2 oraz 3, w których dokładnie jedna z klas jest domknięta, nazywamy *przekrojami wymiernymi*. O przekrojach tych powiemy, że wyznaczają liczbę wymierną – jest nią największa liczba w klasie A lub najmniejsza liczba w klasie B. Można dodatkowo powiedzieć, że każdej liczbie wymiernej q odpowiada dokładnie jeden przekrój unormowany, w którym dolna klasa jest domknięta. Przekroje typu 4, tj. luki w porządku liczb wymiernych, nazywamy *przekrojami niewymiernymi*, a wyznaczone przez nie liczby – liczbami niewymiernymi. Można powiedzieć, że w tym ujęciu liczba rzeczywista jest utożsamiana z pewnym właściwym podzbiorem (przekrój unormowany, w którym dolna klasa jest domknięta) zbioru liczb wymiernych lub też z parą (A, B) będącą przekrojem zbioru $\mathbb{Q}$.

Wprowadzone pojęcie przekroju umożliwia nam inne sformułowanie aksjomatu ciągłości podanego w części poświęconej aksjomatycznej charakterystyce zbioru liczb rzeczywistych. Powiemy, że zbiór $(X, <)$ spełnia aksjomat ciągłości jeżeli żaden jego przekrój Dedekinda nie wyznacza luki. Jest to równoważne uprzednio podanemu aksjomatowi, zgodnie z którym ciągłość w sensie Dedekinda oznacza, że każdy niepusty, ograniczony z dołu (z góry) podzbiór zbioru X, posiada w X kres dolny (górny).

4.3. Konstrukcja Hoborskiego – liczba rzeczywista jako ciąg cyfr (nieskończony ułamek dziesiętny)

W pracy *Nowa teorja liczb niewymiernych* z 1921 roku, Sierpiński nie tylko przedstawia sposób konstrukcji liczb rzeczywistych, lecz pokazuje również, że możliwe jest wykonywanie na nich operacji arytmetycznych.

Definicja 6
Ciąg (a_n) taki, że:

1. $a_0 \in \mathbb{N}$
2. $a_{n+1} = a_n + \frac{c_{n+1}}{10^n}$ *dla* $c_{n+1} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
3. $\sim (\exists k \in \mathbb{N}\, \forall j > k\; a_j = 9)$.

nazywamy *nieujemną liczbą Hoborskiego* (1921).

Ciąg ten możemy zapisać symbolicznie jako nieskończony ułamek dziesiętny: $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$[7]. Zauważmy, że istotnie jeśli $x > 0$ jest liczbą rzeczywistą oraz $a_0 =$

[7] Taki zapis ułamków dziesiętnych został wprowadzony w XVII wieku przez J. Nepera.

$[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x[8], to możemy dobrać cyfry $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ tak, że:

$$a_0 = [x]$$

oraz

$$x = [x], a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Taki sposób przedstawiania liczb rzeczywistych można znaleźć w wielu pracach (np. Hardy, Wright, 1993; Sierpinski, 1964; Feferman, 1989; Kalapodi, 2010). Kolejne wyrazy ciągu stanowią kolejne przybliżenia dziesiętne liczby rzeczywistej, którą możemy utożsamiać z granicą tego ciągu. Przykładowo, pierwsze wyrazy ciągu kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ to:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \ldots$$

Zgodnie z definicją liczby Hoborskiego uznaje się, że niemożliwa jest sytuacja, gdy od pewnego miejsca po przecinku począwszy, na kolejnych miejscach rozwinięcia dziesiętnego wystąpią wyłącznie dziewiątki. Gdybyśmy bowiem dopuścili taką możliwość, otrzymamy sprzeczność. Przypuśćmy, że liczba x posiada taką reprezentację:

$$x = [x], 999\ldots = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$

Wówczas:

$$x = [x] + 1$$

co jest niemożliwe (por. Voskoglou, 2012).

Podsumowując przedstawione powyżej sposoby konstrukcji (zbioru) liczb rzeczywistych, otrzymujemy trzy możliwe sposoby pojmowania liczby rzeczywistej w reprezentacji genetycznej (Tabela 4):

Tabela 4. Charakterystyka liczb rzeczywistych

Charakterystyka liczb rzeczywistych	
Konstrukcja Cantora	Liczba rzeczywista to zbiór współbieżnych ciągów liczb wymiernych
Konstrukcja Dedekinda	Liczba rzeczywista to para podzbiorów zbioru liczb wymiernych
Konstrukcja Hoborskiego	Liczba rzeczywista to ciąg cyfr (nieskończony ułamek dziesiętny)

Słupecki, Piróg-Rzepecka i Hałkowska (1979) stwierdzają, że: „Najbardziej intuicyjną definicją liczby rzeczywistej jest definicja Hoborskiego. Najprostszą teorię działań arytmetycznych podaje arytmetyka Cantora, najprostszą teorię relacji mniejszości – arytmetyka Dedekinda” (s. 162).

[8] Jej istnienie wynika z tego, że ciało liczb rzeczywistych posiada własność Archimedesa.

Każda z omówionych wyżej konstrukcji[9] wskazuje na konieczność uzupełnienia zbioru liczb wymiernych. Zbiór liczb rzeczywistych staje się rozszerzeniem zbioru liczb wymiernych, które jest konieczne dlatego, że w zbiorze $\mathbb{Q}$ istnieją luki (Dedekind) – lub mówiąc inaczej – zbiór liczb wymiernych nie jest domknięty ze względu na branie granicy ciągu jego elementów (Cantor, Hoborski). Jak podaje Maddy (za: Błaszczyk, 2007) cechą wspólną wszystkich teoriomnogościowych charakterystyk zbioru liczb rzeczywistych jest to, że wskazują one na ciągłość jako własność, którą ten zbiór oddaje.

Błaszczyk (2007) zwraca uwagę na różnicę pomiędzy ujęciem aksjomatycznym a genetycznym. To pierwsze „niejako od razu ujmuje liczby rzeczywiste jako szczególne ciało uporządkowane" (Błaszczyk, 2007, s. 311), uzupełniając również luki w dowodach Dedekinda, natomiast drugie odwołuje się do rozszerzania kolejnych struktur liczbowych. Możemy stwierdzić, że aksjomatyczna charakterystyka liczb rzeczywistych **nie** jest reprezentacją transparentną zbioru $\mathbb{R}$ ze względu na konstrukcję liczb rzeczywistych w drodze rozszerzenia zbioru liczb wymiernych.

Z kolei Abian (1981) uznaje definicje Dedekinda i Cantora za uciążliwe i niepraktyczne. Dodaje również, iż stanowią one znacznie mniej czytelną reprezentację niż najbliższe doświadczeniom ucznia nieskończone rozwinięcia dziesiętne. O algebraiczno-aksjomatycznej definicji liczby rzeczywistej, autor pisze:

> „jest po prostu przerażająca i wstrętna. Zrezygnować z [reprezentacji dziesiętnej] i zamiast tego definiować liczbę rzeczywistą za pomocą zimnej i nudnej listy kilkunastu aksjomatów ciała uporządkowanego, to jak zastąpić życie śmiercią lub czytaniem nekrologów" (Abian, 1981, s. 466).

Autor stwierdza, że wszystkie aksjomaty ciała uporządkowanego liczb rzeczywistych mogą być wyprowadzone z reprezentacji dziesiętnej liczby rzeczywistej. Wówczas, aktem hipokryzji byłoby w jego ocenie odrzucenie reprezentacji dziesiętnej i przyjęcie za definicję liczb rzeczywistych „około tuzina aksjomatów".

Przyjęcie różnych definicji liczb rzeczywistych ma także konsekwencje dla możliwości stwierdzenia ciągłości zbioru $\mathbb{R}$. Ciągłość daje się wyprowadzić z definicji Cantora i Dedekinda, lecz jest znacznie prostsza do pokazania jeżeli punktem wyjścia będzie definicja liczb rzeczywistych odwołująca się do ich reprezentacji dziesiętnej. Z kolei charakterystyka aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych podaje ciągłość jako jeden z aksjomatów. W tym, zdaniem Abiana (1981), przejawia się po raz kolejny nieużyteczność charakterystyki aksjomatycznej („po co aksjomatyzować kiedy można udowodnić?" s. 468).

4.4. Poglądowa charakterystyka zbioru liczb rzeczywistych

Liczby rzeczywiste utożsamia się ze zbiorem punktów na prostej. Zwykle to utożsamienie podaje się bez uzasadnienia i przyjmuje się jego oczywistość. Postępowanie wygląda następująco:

1° Na prostej obieramy punkt początkowy O i punkt jednostkowy A.

[9] Możliwe są też inne konstrukcje liczb rzeczywistych. Zainteresowanego Czytelnika odsyłam do pracy (Błaszczyk, 2010).

2° Liczbie rzeczywistej 0 przyporządkowujemy punkt O, liczbie 1 – punkt A.

3° Dowolnej liczbie rzeczywistej x różnej od 0 i 1 przyporządkowujemy taki punkt prostej, którego odległość od punktu O mierzona jednostką długości OA wynosi $|x|$ i który w przypadku $x > 0$ leży po tej samej stronie punktu O co A, a w przypadku $x < 0$ po przeciwnej.

Pomiędzy punktami prostej a elementami zbioru liczb rzeczywistych istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie. Tak silnie zakorzenione jest utożsamianie liczb rzeczywistych z punktami na prostej (osi), że często nazywa się je „punktami osi liczbowej”.

Tezę o odpowiedniości kontinuum arytmetycznego i geometrycznego określa się często mianem aksjomatu Cantora-Dedekinda. Szerzej ten problem ukazuje Błaszczyk (2007), dodając, że twierdzenie podane w pracy Borsuk, Szmielew (1972) ukazuje matematyczny sens tego aksjomatu: linia prosta jest izometryczna z przestrzenią kartezjańską C_1.

5. Liczby rzeczywiste w ujęciu szkolnym

Liczbami rzeczywistymi, jakie poznaje uczeń, są w pierwszej kolejności liczby naturalne, następnie wymierne (ułamki), całkowite ujemne, wreszcie liczby niewymierne. Chcąc mówić o szkolnym ujęciu liczb rzeczywistych, w szczególności wymiernych i niewymiernych, zaznaczmy tylko, że od najwcześniejszych lat szkolnego nauczania matematyki kształtowanie pojęcia liczby u uczniów wiąże się z rozwijaniem rozumienia różnych jej aspektów. W przypadku liczb naturalnych będą to aspekty takie jak: kardynalny (mnogościowy), porządkowy, miarowy i monetarny. Wiele uwagi poświęca się także aspektowi algebraicznemu liczby naturalnej, który wiąże się z przedstawianiem liczb w postaci sumy, różnicy, iloczynu lub ilorazu dwóch lub więcej liczb. Możemy przykładowo postrzegać liczbę 10 jako:

$$
\begin{aligned}
&10 = 0 + 10 = 1 + 9 = \ldots = 9 + 1 = 10 + 0\\
&10 = 11 - 1 = 12 - 2 = \ldots\\
&10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10 \cdot 1\\
&10 = 20 : 2 = 30 : 3 = \ldots
\end{aligned}
$$

Zgodnie z tzw. Zasadniczym Twierdzeniem Arytmetyki, każdą liczbę naturalną $n > 1$ możemy przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników. Przedstawienie takie nazywa się postacią (reprezentacją) **kanoniczną liczby naturalnej**. Niech n będzie liczbą naturalną, zaś liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą liczbami występującymi w rozkładzie n na czynniki pierwsze. Wówczas:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},\ \alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\},\ \text{dla}\ i = 1, \ldots, k$$

Postać kanoniczna liczby naturalnej n jest jej reprezentacją transparentną ze względu na dzielniki tej liczby. Z postaci kanonicznej możemy od razu odczytać, że dzielnikiem liczby n jest każda z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Możemy też łatwo obliczyć d – liczbę dzielników liczby n (por. Sierpiński, 1965, s. 64, Twierdzenie 29):

$$d = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Jak zwracają uwagę dydaktycy matematyki (Semadeni, (red.), 1985, 1988), istotną rolę w kształtowaniu myślenia matematycznego odgrywa racjonalne stosowanie różnych przedstawień pojęć. Zbyt długie stosowanie tych samych środków poglądowych naturalnie rozwija u dzieci większą sprawność manipulacji na konkretnych materiałach, jednak w efekcie może prowadzić do tego, że w umyśle dziecka w miejsce rozwoju abstrakcyjnych pojęć matematycznych, powstawać, rozwijać i utrwalać się będą ich konkretyzacje. Podobnie rzecz ma się ze stosowaniem tych samych reprezentacji danego pojęcia – może ono prowadzić do kształtowania się w umyśle ucznia wybiórczego, zdeformowanego obrazu pojęcia.

Reprezentacje liczb wymiernych i niewymiernych stwarzają wiele dydaktycznych okazji do tego, by mówić o różnych reprezentacjach liczb rzeczywistych i ćwiczyć się w konwersji pomiędzy nimi.

5.1. Reprezentacja w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$

Pierwsze określenia liczb wymiernych i niewymiernych, z jakimi spotyka się uczeń, odwołują się do pojęcia ułamka, z którym jest już zaznajomiony.

Liczby wymierne	**Liczby niewymierne**
To liczby, które da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	To liczby rzeczywiste, których nie da się przedstawić w postaci takiego ułamka $\frac{p}{q}$

Sam ułamek zwykły można przez rozszerzanie przedstawić na nieskończenie wiele sposobów np. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ itd.

5.2. Reprezentacja w postaci ułamka dziesiętnego

Zamiana ułamka zwykłego na dziesiętny wiąże się z koniecznością uświadomienia sobie, że każda liczba rzeczywista może być postrzegana jako liczba o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym. Notacja liczb rzeczywistych w postaci rozwinięcia dziesiętnego (Abian, 1981; Kalapodi, 2010; Voskoglou, Kosyvas, 2012) jest również stosowana w szkole. Liczby wymierne od niewymiernych odróżnia rodzaj rozwinięcia dziesiętnego, co przedstawiono poniżej:

Liczby wymierne	**Liczby niewymierne**
Rozwinięcie dziesiętne jest okresowe, przy czym możliwe są dwie sytuacje 1. Od pewnego miejsca począwszy w rozwinięciu dziesiętnym występują same zera; takie rozwinięcie dziesiętne zwykło nazywać się skończonym, a w zapisie pomija się zera[10]; 2. Po przecinku powtarza się pewna grupa cyfr zwana okresem; długość okresu liczby wymiernej przedstawionej w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ wynosi co najwyżej $q - 1$.	Rozwinięcie dziesiętne jest **nieokresowe**.

Nieskracalny ułamek zwykły będzie miał rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi dzielnikami pierwszymi liczby znajdującej się w mianowniku będą 2 lub 5. Liczbę wymierną, która ma rozwinięcie dziesiętne skończone, można przedstawić jeszcze inaczej, zmniejszając ostatnią cyfrę skończonego rozwinięcia dziesiętnego o jeden i dopisując nieskończenie wiele dziewiątek po niej. Przykładowo:

$$5 = 5,000\ldots = 4,(9)$$

Jeżeli wśród dzielników pierwszych liczby w mianowniku ułamka $\frac{p}{q}$ takiego, że $(p, q) = 1$ występują liczby inne niż 2 i 5, wówczas ułamek będzie miał rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe. Przy czym:

a) jeżeli liczby 2 oraz 5 w ogóle nie występują w rozkładzie liczby z mianownika na czynniki pierwsze, okres rozpocznie się od razu po przecinku

b) w przeciwnym wypadku, pomiędzy przecinkiem a grupą cyfr okresu, wystąpią cyfry do okresu nie należące (por. Dąbrowski, 2000).

Mając na uwadze problem względnej transparentności reprezentacji liczb, Zazkis (2005) uznaje ułamek zwykły postaci $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ za reprezentację liczby rzeczywistej transparentną ze względu na jej wymierność, zaś reprezentację typu $0,01001000100001\ldots$ za transparentną reprezentację liczby niewymiernej[11].

Na koniec zauważmy jeszcze, że każdą liczbę rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym możemy przybliżać liczbami wymiernymi o rozwinięciach skończonych. W szczególności liczby niewymierne możemy przybliżać od góry lub z dołu z dowolną dokładnością.

[10] Zauważmy, że podobne określenie występuje w kilku pracach (Opial, 1975; Białynicki-Birula, 1976) w odniesieniu do wielomianów rozumianych jako ciągi nieskończone, lub w przedstawieniu liczby rzeczywistej w ujęciu analizy niestandardowej (Błaszczyk, Major, 2014).

[11] Nie będzie reprezentacją transparentną zapis np. $1,54675\ldots$ Z takiego przedstawienia nie sposób wnioskować czy liczba jest niewymierna, czy może ostatnia cyfra – pięć – wskazuje, że cyfry 5467 stanowią okres rozwinięcia.

5.3. Przekształcanie reprezentacji liczb rzeczywistych

Jednym z ćwiczeń często wykonywanym przez uczniów jest zamiana ułamka zwykłego na dziesiętny i odwrotnie. W tej części pracy zestawimy różne sposoby wykonywania operacji konwersji reprezentacji liczb wymiernych.

5.4. Przejście od rozwinięcia dziesiętnego do postaci $\frac{p}{q}$

W tej części mówić będziemy o liczbach z przedziału $(0,1)$, bowiem uwzględnienie części całkowitej w rozważaniu liczb spoza tego przedziału nie nastręcza żadnych dodatkowych trudności.

Zauważmy, że:

1) Jeżeli liczba posiada rozwinięcie dziesiętne skończone n-cyfrowe zamiana wygląda następująco:

$$0, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n}$$

2) Jeżeli liczba posiada rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe o okresie rozpoczynającym się zaraz po przecinku, wówczas zamiana przebiega w następujący sposób:

$$0, (a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n} + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{(10^n)^2} + \dots =$$
$$\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n - 1}$$

W powyższych przekształceniach korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego.
Obserwacja: Warto zauważyć, że choć przeszliśmy od postaci rozwinięcia dziesiętnego do zapisu liczby w postaci ułamka zwykłego, uzyskany rezultat ułatwi nam za chwilę wykonanie przejścia w drugą stronę.
Możemy bowiem wyciągnąć wniosek, że ułamek postaci

$$\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n - 1}$$

tj. taki, który w liczniku ma liczbę n-cyfrową, a w mianowniku liczbę postaci $10^n - 1$ ma w systemie dziesiątkowym rozwinięcie o okresie długości n, które rozpoczyna się bezpośrednio po przecinku.

3) Jeżeli liczba posiada rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe, ale okres nie zaczyna się bezpośrednio po przecinku, wówczas można postąpić na co najmniej dwa sposoby.

Pierwszy sposób polega na oddzieleniu części nieokresowej od zawierającej okres np. $0,2(34) = 0,2 + 0,0(34)$, zamianie drugiego składnika na ułamek zwykły i powróceniu do działania, które należy wykonać. Zilustrujmy to przykładem: weźmy liczbę $A = 0,2(34)$.

$$A = 0,2(34) = 0,2 + 0,0(34)$$

Zajmiemy się teraz zamianą części zawierającej okres na ułamek zwykły. Oznaczmy tę część jako x:

$$x = 0,0(34)| \cdot 10 \tag{1}$$

$$10x = 0,(34) = \frac{34}{99} \tag{2}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z obserwacji z poprzedniego akapitu. Stąd:

$$x = \frac{34}{990}$$

Zatem

$$A = 0,2 + \frac{34}{990} = \frac{2 \cdot 99}{10 \cdot 99} + \frac{34}{990} = \frac{232}{990}$$

Drugi sposób pozwala od razu zająć się całą podaną liczbą. Pokażemy to na tym samym przykładzie:

$$x = 0,2(34) \tag{3}$$

$$10x = 2,(34) \tag{4}$$

$$1000x = 234,(34) \tag{5}$$

$$1000x - 10x = 234,(34) - 2,(34) = 232 \tag{6}$$

$$990x = 232 \tag{7}$$

$$x = \frac{232}{990} \tag{8}$$

W ogólnym przypadku procedura postępowania jest następująca:

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_m) \\ 10^n \cdot x &= a_1 a_2 \dots a_n, (b_1 b_2 \dots b_m) \\ 10^{m+n} \cdot x &= a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m, (b_1 b_2 \dots b_m) \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} 10^{m+n} \cdot x - 10^n \cdot x &= x \cdot 10^n (10^m - 1) \\ &= \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \end{aligned}$$

Stąd:

$$x = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n (10^m - 1)}$$

Ponieważ:

$$10^m - 1 = \underbrace{99\dots999}_{m\ dziewiątek}$$

ostatecznie mozemy liczbę x zapisać następująco:

$$0, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_m) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99\dots999}_{m\ dziewiątek}\ \underbrace{00..000}_{n\ zer}}.$$

5.5. Przejście od postaci $\frac{p}{q}$ do rozwinięcia dziesiętnego

Rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego nieskracalnego $\frac{p}{q}$ można zawsze uzyskać wykonując dzielenie $p : q$. Ponieważ, wykonując takie dzielenie, możemy uzyskać co najwyżej $q - 1$ różnych niezerowych reszt z dzielenia, jeżeli ułamek będzie miał rozwinięcie dziesiętne okresowe, maksymalna długość okresu może wynosić $q - 1$. Dzielenie takie nie jest jednak jedynym sposobem zamiany.

Oczywiście jeżeli ułamek ma mieć rozwinięcie dziesiętne skończone, by zamienić go na ułamek dziesiętny wystarczy rozszerzyć ułamek tak, aby w jego mianowniku wystąpiła liczba będąca potęgą liczby 10 (a więc 10, 100, 1000 itd.).

Jeżeli liczba q jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5, z pomocą przyjdzie nam tzw. Małe Twierdzenie Fermata (MTF), które mówi, że:

Twierdzenie 1
Jeżeli p jest liczbą pierwszą, b – liczbą całkowitą oraz zachodzi warunek $(p, b) = 1$, wówczas $p|(b^{p-1} - 1)$.

Oczywiście w systemie dziesiątkowym, liczba $b = 10$. Zastosowanie tego twierdzenia pokażemy na kilku przykładach.

Przykład 5
Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{7}$.

Łatwo sprawdzić, że w systemie dziesiątkowym spełnione są założenia Małego Twierdzenia Fermata:

$$p = 7,\ b = 10,\ (p, b) = 1$$

Zatem

$$7|(10^6 - 1)$$

czyli $7|999999$.
Zatem:

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{7 \cdot 142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{142857}{10^6 - 1} = 0,(142857)$$

Zastosowanie MTF pozwala nam znaleźć liczbę postaci $b^{p-1} - 1$, która jest podzielna przez p – liczbę pierwszą, niestety nie zawsze wskazuje najmniejszą taką liczbę.

Przykład 6
Znajdź rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{3}$.

$$p = 3,\ b = 10,\ (p, b) = 1$$

Stąd wniosek, że:

$$3|(10^2 - 1)$$

Oczywiście widzimy od razu, że istnieje mniejsza liczba postaci $10^n - 1$ podzielna przez 3 – jest nią 9. Nie ma więc potrzeby rozszerzać mianownika ułamka do 99, choć istotnie $0,(33) = 0,(3)$.

Ostatecznie długość okresu rozwinięcia szukanego z zastosowaniem MTF będzie wyrażać się albo liczbą $p-1$, albo liczbą, która jest jej dzielnikiem. W powyższym przykładzie: $p-1=2$, długość okresu 1, i oczywiście $1|2$. Inny przykład podają Zazkis i Whitkanack (1993): z MTF wynika, że ułamek $\frac{1}{13}$ może mieć okres o długości 12 (bo $p=13$, $b=10$, $(13,10)=1$, a zatem $13|(10^{12}-1)$, co sugeruje możliwość uzyskania okresu składającego się z 12 cyfr). Okazuje się jednak, że również $13|(10^6-1)$. Zatem, gdybyśmy postąpili zgodnie ze wskazaniem MTF, uzyskalibyśmy okres, który sam w sobie zawierałby powtarzającą się grupę cyfr – podobnie jak wcześniej w przypadku $\frac{1}{3}$.

W sytuacji, gdy w mianowniku ułamka występuje liczba złożona, możemy skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2
Jeżeli liczba d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a oraz b wówczas istnieją takie liczby całkowite x oraz y, że $d=ax+by$.

Konsekwencją tego twierdzenia jest możliwość przedstawienia ułamka, którego mianownik jest liczbą złożoną jako sumy ułamków, których mianownikami są liczby pierwsze.

Niech dany będzie $\frac{1}{ab}$ ułamek taki, że $(a,b)=1$. Wówczas, stosując powyższe twierdzenie, otrzymujemy:

$$\frac{1}{ab}=\frac{ax+by}{ab}=\frac{x}{b}+\frac{y}{a}$$

Rozważmy dla przykładu ułamek $\frac{1}{12}$. Ponieważ nie możemy znaleźć rozszerzenia tego ułamka, w którego mianowniku znalazłaby się liczba postaci 10^n (bo $3|12$) lub 10^n-1 (bo 12 jest liczbą parzystą, a 10^n-1 nie), spróbujemy zastosować podane twierdzenie. Okazuje się, że możemy przedstawić ułamek $\frac{1}{12}$ jako różnicę dwóch ułamków, w mianownikach których są liczby pierwsze, a dalej łatwo znajdziemy rozwinięcie dziesiętne liczby:

$$\frac{1}{12}=\frac{4\cdot 1-3\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0,(3)-0,25=0,08(3)$$

Wyznaczenie okresu może nie być łatwe nawet przy użyciu kalkulatora. Na przykład ułamek $\frac{23}{43}$ ma okres długości 21. Zwykły kalkulator nie wyświetla wszystkich cyfr występujących w okresie. Niektórzy uczniowie (a także studenci) ulegają wówczas złudzeniu, że skoro nie widać powtarzającej się grupy cyfr, to pewnie liczba jest niewymierna. Interpretacja takiej odpowiedzi ucznia (lub studenta) może być następująca:

a) Uczeń ma słabo wykształcone rozumienie reprezentacji liczby wymiernej w postaci ułamka zwykłego – reprezentacja ta nie jest dla niego transparentna i okazuje się niewystarczającym argumentem przemawiającym za wymiernością liczby,

b) Reprezentacja dziesiętna liczby rzeczywistej jest dla ucznia znacznie bardziej sugestywna („nie widać powtarzających się cyfr”) i jest reprezentacją dominującą w rozstrzyganiu o wymierności podanej liczby,

c) Źródło problemu może tkwić także w wieloznaczności używanego często znaku wielokropka. Zapis typu $2,31842\ldots$ jest niejednoznaczny. W zapisie $0,333\ldots$ odczytamy trzy kropki jako skrót myślowy („i tak dalej") – rozumiemy, że kolejnymi cyframi będą wyłącznie trójki. W zapisie $0,123123123\ldots$ zrozumiemy, że układ cyfr 123 będzie powtarzał się w nieskończoność. W równości $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$ trzy kropki będą oznaczały, że po podanych cyfrach rozwinięcia dziesiętnego następuje nieskończenie wiele następnych. Ponieważ wiemy dokładnie o jaką liczbę chodzi – pierwiastek z dwóch – wiemy też, że w rozwinięciu dziesiętnym nie znajdziemy okresu. Gdyby jednak zapisać wyłącznie $1,414213562\ldots$ trudno o interpretację tego zapisu. Nie wiemy czy ktoś miał na myśli pierwiastek z dwóch, czy może $1,(414213562)$ lub też $414(21356)$[12].

6. Reprezentacje liczb rzeczywistych wykraczające poza podstawę programową

6.1. Reprezentacja w postaci ułamka nie-dziesiętnego

Jednym z zagadnień omawianych zwykle w ramach kursu z dydaktyki matematyki prowadzonego na studiach nauczycielskich są **reprezentacje liczb naturalnych w różnych systemach liczbowych** o podstawie naturalnej. Przypomnijmy twierdzenie, które stanowi istotę dalszych rozważań.

Niech w będzie dowolną liczbą naturalną większą od 1. W systemie liczbowym, za podstawę którego przyjmiemy liczbę w, rolę cyfr będą pełnić znaki (dowolne[13]), o których ustalimy, że oznaczają liczby naturalne od 0 do $w-1$[14].

TWIERDZENIE 3
Każdą liczbę naturalną $g \geq 1$ można zapisać w postaci

$$g = c_n \cdot w^n + c_{n-1} \cdot w^{n-1} + \ldots + c_2 \cdot w^2 + c_1 \cdot w^1 + c_0 \cdot w^0$$

gdzie

$$w \in \mathbb{N}_2,\ c_i \in \{0, 1, \ldots, w-1\} \text{ dla } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ oraz } c_n \neq 0.$$

Twierdzenie to informuje nas również o tym, że część całkowitą $E(x)$ dowolnej liczby rzeczywistej x możemy przedstawić w postaci rozwinięcia w systemie pozycyjnym o dowolnej podstawie naturalnej $w > 1$.

Poniżej podano przykłady ilustrujące konwersję liczb naturalnych z systemu dziesiątkowego na system o innej podstawie naturalnej i odwrotnie.

[12] Piszemy też czasem np. że $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ Tutaj trzy kropki zastępują nam liczby naturalne od 4 do 98, których wypisanie byłoby żmudne. Wiemy o jakie elementy należące do zbioru A nam chodzi, wynika to z kontekstu.

[13] Jest kwestią naszego przyzwyczajenia i ogólnie przyjętej konwencji, że przez słowo „cyfra" rozumiemy każdy spośród znaków graficznych 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oraz 9, podczas gdy może nim być dowolny znak graficzny użyty dla oznaczenia danej liczby.

[14] W systemie dziesiątkowym znakami, którymi się posługujemy, są cyfry od 0 do 9; w systemie szesnastkowym liczby od 10 do 15 oznaczone są kolejnymi literami alfabetu A, B, C, itd., zaś w systemie sześćdziesiątkowym potrzeba aż sześćdziesięciu cyfr na oznaczenie liczb od 0 do 59.

Tabela 5. Przykład konwersji liczb naturalnych.

<table>
<tr><td>Liczba naturalna zapisana w systemie dziesiątkowym</td><td>$\rightarrow$
$\leftarrow$</td><td>Liczba naturalna zapisana w systemie liczbowym, którego podstawą jest liczba naturalna różna od 10</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\leftarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykład: Zapiszmy liczbę 1024_6 w systemie dziesiątkowym.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$1024_6 = 1 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 216 + 12 + 4 = 232_{10}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\rightarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykład: Zapiszmy liczbę 1024 w systemie szóstkowym.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Pierwszy sposób

$$1024 : 6 = 170, r4$$
$$170 : 6 = 28, r2$$
$$28 : 6 = 4, r4$$
$$4 : 6 = 0, r4$$

Zapis liczby w systemie dziesiątkowym uzyskamy zapisując kolejno od końca otrzymane reszty[15].

Zatem

$$1024_{10} = 4424_6$$

Sprawdźmy:

$$4424_6 = 4 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 864 + 144 + 12 + 4 = 1024_{10}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Drugi sposób

Zastanówmy się najpierw jakie są kolejne naturalne potęgi liczby 6 mniejsze od liczby 1024. Przyjmując, że 0 jest liczbą naturalną mamy kolejno: 1, 6, 36 i 216. Czwarta potęga liczby 6, czyli 1296, przekracza już liczbę 1024.

Ile razy w 1024 zmieścimy największą z rozważnych potęg tj. $6^3 = 216$?

Liczba 216 zmieści się w 1024 cztery razy, ponieważ

$$4 \cdot 216 = 864 < 1024$$

zaś

$$5 \cdot 216 = 1080 > 1024.$$

Ile razy w tym co nam zostało, tj. $1024 - 864 = 160$ zmieści się $6^2 = 36$?

Odpowiedź to cztery, ponieważ $4 \cdot 36 = 144 < 160$ zaś $5 \cdot 36 = 180 > 160$.

Dalej sprawdzamy, że w liczbie 16 (różnica 160 i 144) znajdziemy dwie pierwsze potęgi liczby 6, zaś pozostałej różnicy liczb 16 i 12 zerowa potęga liczby 6 mieści się 4 razy. Możemy więc zapisać:

$$1024 = 4 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 = 4424_6$$

</td></tr>
</table>

[15] O problemach związanych z wykonywaniem i zapisywaniem dzielenia z resztą można przeczytać w: Semadeni, Z. (1978). *O symbolu dzielenia z resztą*. Matematyka (3), 139–144.

Kolejne twierdzenie gwarantuje nam możliwość analogicznego przedstawienia części ułamkowej dowolnej liczby rzeczywistej x.

Twierdzenie 4
Dla $w \in \mathbb{N}_2$ oraz dowolnego ciągu $b_1, b_2, \ldots$ liczb naturalnych spełniających warunek $0 \leq b_n \leq w - 1$ wyrażenie:

$$\frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \ldots + \frac{b_m}{w^m} + \ldots$$

jest pewną liczbą rzeczywistą[16].

Z twierdzeń 3 oraz 4 wynika, że każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci rozwinięcia:

$$c_n \cdot w^n + c_{n-1} \cdot w^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot w^1 + c_0 \cdot w^0 + b_1 \cdot w^{-1} + b_2 \cdot w^{-2} + \ldots + b_m \cdot w^{-m} + \ldots$$

W szczególności, jeżeli $w = 10$, otrzymujemy rozwinięcie dziesiętne:

$$c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + b_m \cdot 10^{-m} + \ldots$$

Możliwość przedstawienia dowolnej liczby rzeczywistej w systemie o dowolnej podstawie naturalnej $w > 1$ rodzi pytanie o możliwość przechodzenia pomiędzy systemami o różnych podstawach również w przypadku reprezentacji liczb niecałkowitych. Omówimy je w dalszej części.

7. Liczby wymierne w nie-dziesiątkowych systemach pozycyjnych

Zamiana ułamka dwójkowego, trójkowego itd. na ułamek dziesiętny jest bardzo prosta. Twierdzenia 3 oraz 4 gwarantują nam możliwość przedstawienia dowolnej liczby rzeczywistej w dowolnym systemie liczbowym o podstawie naturalnej większej od 1. Postępowanie nasze będzie opierać się na analogii pomiędzy różnymi systemami liczbowymi. Zilustrujmy to na przykładzie. Poniżej przedstawiamy interpretację liczby zapisanej przy użyciu cyfr 1, 2, 3 oraz 4 w różnych systemach liczbowych: dziesiątkowym, ósemkowym i piątkowym[17].

Tabela 6

Podstawa systemu w	Liczba $12,34_w$	$1 \cdot w^1 + 2 \cdot w^0 + 3 \cdot w^{-1} + 4 \cdot w^{-2}$	Wartość liczby w systemie dziesiątkowym
10	$12,34_{10}$	$1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$	$12\frac{34}{100} = 12,34$
8	$12,34_8$	$1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2}$	$10\frac{7}{16} = 10,4375$
5	$12,34_5$	$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{-2}$	$10\frac{19}{25} = 7,76$

[16] W dowodzie twierdzenia (por. Semadeni, 1979) korzysta się z aksjomatu ciągłości.

[17] Zauważmy, że np. cyfra cztery nie występuje w systemie czwórkowym, podobnie jak nie istnieje „cyfra” dziesięć w systemie dziesiątkowym.

Zamiana ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ na ułamek nie-dziesiętny (np. szóstkowy, ósemkowy itd.) jest nieco bardziej złożona, jednak stosować tu będziemy analogiczne reguły jak w przypadku ułamków dziesiętnych. W istocie reguły, które stosowaliśmy, wykonując konwersje w obrębie systemu dziesiątkowego, były szczególnymi przypadkami bardziej ogólnych twierdzeń.

Nieskracalny ułamek zwykły będzie miał w systemie o danej podstawie $w > 1$ rozwinięcie skończone wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi dzielnikami pierwszymi liczby znajdującej się w mianowniku będą czynniki pierwsze występujące w rozkładzie liczby w. Liczbę wymierną, która ma rozwinięcie dziesiętne skończone, można przedstawić jeszcze inaczej, zmniejszając ostatnią liczbę rozwinięcia dziesiętnego o jeden i dopisując nieskończenie wiele cyfr $w - 1$ po niej. Przykładowo:

$$0,3_4 = 0,2333\ldots_4 = 0,2(3)_4$$

Sprawdźmy poprawność otrzymanego zapisu:

$$0,3_4 = 3 \cdot 4^{-1} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$0,2(3)_4 = 2 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 4^{-2} + 3 \cdot 4^{-3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Jeżeli wśród dzielników pierwszych liczby w mianowniku ułamka $\frac{p}{q}$ takiego, że $(p, q) = 1$ występują inne liczby niż dzielniki pierwsze liczby w będącej podstawą systemu, wówczas ułamek będzie miał rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe. Przy czym:

a) jeżeli dzielniki pierwsze w nie występują w rozkładzie liczby z mianownika na czynniki pierwsze, okres rozpocznie się od razu po przecinku;

b) w przeciwnym wypadku, pomiędzy przecinkiem a grupą cyfr okresu, wystąpią cyfry nie należące do okresu.

Z kolei jeżeli w mianowniku ułamka jest liczba pierwsza, możemy stosować MTF, przyjmując za b, o którym mowa w twierdzeniu, liczbę naturalną w, która jest podstawą systemu, w którym chcemy zapisać daną liczbę.

Przykład 7
Zapiszmy ułamek $\frac{1}{4}$ w systemie szóstkowym.

Jedynym dzielnikiem pierwszym liczby 4 jest liczba 2, która jest także jednym z dzielników liczby 6 będącej podstawą systemu. Możemy zatem spodziewać się ułamka o rozwinięciu skończonym, a zamianę przeprowadzimy rozszerzając ułamek:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3^2}{4 \cdot 3^2} = \frac{9}{6^2} = \frac{1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0}{6^2} = 1 \cdot 6^{-1} + 3 \cdot 6^{-2} = 0,13_6$$

Przykład 8
Zapiszmy ułamek $\frac{7}{16}$ w systemie ósemkowym.

Ponownie jedynym dzielnikiem pierwszym liczby w mianowniku jest liczba 2, która jest także jednym z dzielników liczby 8 będącej podstawą systemu. Nasze postępowanie będzie więc analogiczne:

$$\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7 \cdot 4^4}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{7 \cdot 256}{8^4} = \frac{1792}{8^4} = \frac{3 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0}{8^4}$$
$$= \frac{3 \cdot 8^3}{8^4} + \frac{4 \cdot 8^2}{8^4} = 3 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2} = 0,34_8$$

Przykład 9
Zapiszmy ułamek $\frac{1}{6}$ w systemie siódemkowym.

W tej sytuacji podstawą systemu jest liczba pierwsza. W mianowniku ułamka występuje liczba złożona. Konwersję wykonamy w czterech krokach.
1° Zauważmy, że:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

2° Zapiszmy ułamek $\frac{1}{2}$ w systemie siódemkowym.
Skorzystamy z MTF:

$$p = 2,\ b = 7,\ (p, b) = 1$$

Zatem $2|(7^1 - 1)$ czyli $2|6$. Zatem:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 7^0}{7^1 - 1} = 0,(3)_7$$

Sprawdźmy otrzymany wynik obliczając sumę szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a = \frac{3}{7}$ i ilorazie $q = \frac{1}{7}$.

$$\frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3° Zapiszmy teraz ułamek $\frac{1}{3}$ w systemie siódemkowym.
Szukamy liczby postaci $7^n - 1$ podzielnej przez 3. MTF wskazywałoby wprawdzie na 48, ale z łatwością zauważymy, że $3|7^1 - 1$
Zatem:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2 \cdot 7^0}{7^1 - 1} = 0,(2)_7$$

Sprawdźmy otrzymany wynik, obliczając sumę szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a = \frac{2}{7}$ i ilorazie $q = \frac{1}{7}$:

$$\frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4° Zapiszmy ułamek $\frac{1}{6}$ w systemie siódemkowym:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0,(3)_7 - 0,(2)_7 = 0,(1)_7.$$

Również tu możemy sprawdzić otrzymany wynik, obliczając sumę szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a = \frac{1}{7}$ i ilorazie $q = \frac{1}{7}$:

$$\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{6}.$$

Przykład 10
Zapiszmy ułamek $\frac{1}{3}$ w systemie piątkowym.

Zauważmy, że $3|(5^2-1)$. Poszukiwany ułamek będzie zatem ułamkiem okresowym o okresie długości 2. Zapisując ułamek w postaci $\frac{\text{liczba dwucyfrowa w systemie piątkowym}}{5^2-1}$, cyfry okresu odczytamy z licznika.
Zapiszemy zatem:

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{24} = \frac{1\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0}{5^2-1} = \frac{13_5}{5^2-1} = 0,(13)_5$$

Sprawdźmy otrzymany wynik:

$$\begin{aligned} 0,(13)_5 &= 1\cdot 5^{-1} + 3\cdot 5^{-2} + 1\cdot 5^{-3} + 3\cdot 5^{-4} + \ldots \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} + \frac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Przykład 11
Zapiszmy ułamek $\frac{1}{5}$ w systemie trójkowym.

Zauważmy, że $5|(3^4-1)$. Liczba 3^4-1 jest najmniejszą liczbą postaci 3^n-1 podzielną przez 5. Poszukiwany ułamek będzie zatem ułamkiem okresowym o okresie długości 4. Zapisując ułamek w postaci $\frac{\text{liczba czterocyfrowa w systemie trójkowym}}{3^4-1}$, cyfry okresu odczytamy z licznika.
Zapiszemy zatem:

$$\frac{1}{5} = \frac{16}{80} = \frac{1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0}{3^4-1} = \frac{121_3}{3^4-1} = 0,(0121)_3$$

Sprawdzenie poprawności otrzymanego wyniku pozostawiamy Czytelnikowi.

8. Liczby rzeczywiste jako ułamki łańcuchowe

Przedstawienie liczb rzeczywistych w postaci ułamka łańcuchowego nie jest związane z żadną ze znanych konstrukcji. Liczby rzeczywiste przedstawiane były w tej postaci już za czasów Euklidesa. Ułamki łańcuchowe to ciągi liczb $c, n_1, n_2, \ldots$, przy pomocy których zapisano liczbę x w następujący sposób:

$$x = c + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \ldots}}}}$$

Współcześnie rozwinięcie liczby w ułamek łańcuchowy uzyskuje się na mocy odpowiednich twierdzeń arytmetyki wyższej (np. Grzegorczyk, 1971). Rozwinięcia łańcuchowe stanowią jeszcze jeden rodzaj przedstawienia liczb rzeczywistych w sposób jednoznaczny, przy czym:

Liczby wymierne	**Liczby niewymierne**
Można przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego skończonego	Nie da się ich przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego skończonego, można je natomiast przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego nieskończonego. Dodatkowo pewne liczby niewymierne będą przedstawione w postaci okresowych ułamków łańcuchowych

Poniżej przedstawiamy dla przykładu zamianę liczby wymiernej na ułamek łańcuchowy. Zamiana w drugą stronę jest trywialnie prosta, dlatego zostanie pominięta.

Przykład 12
Przedstaw liczbę $\frac{2018}{1000}$ w postaci ułamka łańcuchowego.

W pierwszym kroku wykonajmy dzielenie z resztą:

$$2018 : 1000 = 2, r18$$

Możemy zatem zapisać następujące równości:

$$2018 = 2 \cdot 1000 + 18$$
$$\frac{2018}{1000} = 2 + \frac{18}{1000} = 2 + \frac{1}{\frac{1000}{18}}$$

W kolejnym kroku wykonamy dzielenie:

$$1000 : 18 = 55, r10$$

i zapiszemy równości:

$$1000 = 55 \cdot 18 + 10$$
$$\frac{1000}{18} = 55 + \frac{10}{18}.$$

Wykonując analogiczne dzielenie raz jeszcze, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{2018}{1000} = 2 + \frac{18}{1000} = 2 + \frac{1}{\frac{1000}{18}} = 2 + \frac{1}{55 + \frac{10}{18}} = 2 + \frac{1}{55 + \frac{1}{\frac{18}{10}}}$$
$$= 2 + \cfrac{1}{55 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{10}{8}}}} = 2 + \cfrac{1}{55 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{8}}}} = 2 + \cfrac{1}{55 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Przykład 13
Przedstaw liczbę $\sqrt{2}$ w postaci ułamka łańcuchowego.

Przedstawmy w pierwszej kolejności liczbę $\sqrt{2}$ jako sumę liczby całkowitej oraz liczby dodatniej mniejszej od 1:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Teraz, podobnie jako poprzednio, przedstawimy liczbę $\sqrt{2}+1$ jako sumę liczby całkowitej oraz dodatniej mniejszej od 1:

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Zatem:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

W kolejnym przykładzie zobaczymy jak z postaci ułamka łańcuchowego nieskończonego można uzyskać bardziej czytelną postać liczby niewymiernej, którą on reprezentuje.

Przykład 14
Rozważmy liczbę ϕ przedstawioną w postaci ułamka łańcuchowego.

Zauważmy, że

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} = 1 + \frac{1}{x} \text{ oraz } x > 0$$

Rozwiązując równanie $x = 1 + \frac{1}{x}$, przy założeniu, że $x > 0$, otrzymujemy wynik:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem liczba x występująca w zadaniu to *złota liczba.*
Podobnie można wyznaczać inne liczby niewymierne, które zostały zapisane w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego.

Rozwinięcie łańcuchowe liczby rzeczywistej jest reprezentacją transparentną ze względu na wymierność (niewymierność) liczby. Jest jednak nieużyteczne jeśli chcemy na tak zapisanych liczbach wykonywać działania arytmetyczne.

9. Wybrane szkolne reprezentacje poglądowe liczb rzeczywistych

W ujęciu szkolnym zbiór liczb rzeczywistych przedstawia się jako sumę mnogościową zbioru liczb wymiernych i niewymiernych[18]. Graficzną reprezentacją, która ukazuje tę własność zbioru liczb rzeczywistych, jest diagram Venna. Zwróćmy uwagę na sposoby przedstawiania zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów w podręcznikach.

Poniższe rysunki przedstawiają jedynie schemat prezentacji w różnych podręcznikach, pominięte zostały w szczególności elementy wskazywane przez autorów podręczników jako reprezentatywne dla poszczególnych zbiorów.

Diagram I

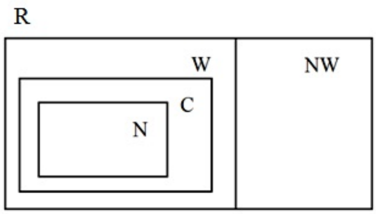


Diagram II[19]

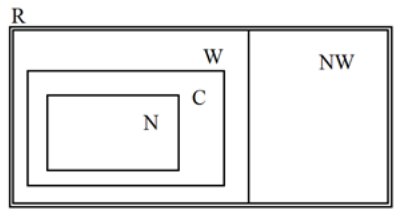


Diagram III[20]

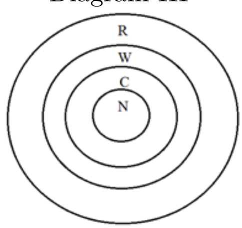
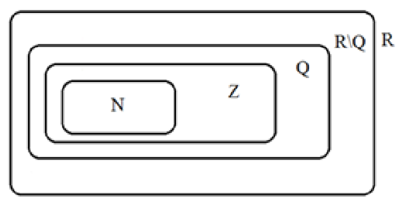


Diagram IV[21]



Reprezentacje poglądowe przedstawione powyżej, podobne do tych, które można znaleźć w podręcznikach szkolnych, mają na celu kształtowanie u uczniów rozumienia pojęcia zbioru liczb rzeczywistych. O diagramach I i III możemy powiedzieć, że są reprezentacjami zbioru liczb rzeczywistych transparentnymi ze względu na inkluzję zbiorów. Ilustracja II natomiast błędnie sugeruje, że zbiór liczb rzeczywistych zawiera oprócz zbiorów liczb wymiernych i niewymiernych jeszcze jakieś elementy (zbiór przedstawiony jako „ramka"). Wiele kontrowersji może budzić reprezentacja IV, którą można znaleźć w podręczniku dla nauczycieli. Z jednej strony, patrząc na ten rysunek, czytając go „od wewnątrz", akceptujemy, że figura mniejsza zawierająca się w większej reprezentuje zbiór zawarty w innym zbiorze np. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Tymczasem, choć schemat rysunku się nie zmienia, zbiór liczb wymiernych

[18]Ciekawą propozycję dydaktyczną można znaleźć w pracy: Smith, S. M. (1970). Two Unusual Representations for the Set of Real Numbers, *Mathematics Teacher* **63**(8), 665.

[19]Na przykład: *Matematyka w otaczającym świecie, zakres podstawowy. Podręcznik dla klasy 1*, Wydawictwo Podkowa, Gdańsk 2012, 12.

[20]Na przykład: *Matematyka krok po kroku. Podręcznik dla klasy pierwszej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Res Polonia, 27.

[21]Na przykład: Bryll, G., Sochacki, R. (2012). *Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Nowik, 57.

oznaczony jako $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie zawiera w sobie zbioru $\mathbb{Q}$. Oczywiście łatwo zrozumieć intencje autorów. Wiemy też, że $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$ oraz $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Niemniej jednak, rysunek stałby się dużo bardziej czytelny i nie wprowadzałby niepotrzebnej konfuzji, gdyby autorzy konsekwentnie użyli jednolitej symboliki. Mogliby albo symbol $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zastąpić przez $\mathbb{R}$ (wówczas ilustracja IV byłaby podobna do ilustracji III), albo w miejsce $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Q}$ wpisać odpowiednio: $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Jak pokazują powyższe przykłady, reprezentacja zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów za pomocą diagramu Venna może być transparentna ze względu na inkluzję zbiorów, aczkolwiek nie wszystkie podręczniki stosują reprezentacje przejrzyste w tym względzie.

Oczywiście nie można utożsamiać reprezentacji pojęcia z samym pojęciem. A jednak zaprezentowane ilustracje mogą być dla ucznia bardzo sugestywne i błędnie kształtować jego rozumienie zbiorów liczbowych. Z ilustracji tych bowiem nie wynika wcale, że zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ są równoliczne. Sugerują one coś wręcz przeciwnego – na rysunku zbiór liczb naturalnych jest wyraźnie „mniejszy" niż zbiór liczb całkowitych, jednak nie sposób uniknąć tej trudności (Również dwa odcinki o różnej długości można posądzić o nierównoliczność!). Podobnie rzecz ma się ze zbiorem liczb niewymiernych. Przedstawiany jest na rysunkach zwykle jako mniejszy, co może sugerować uczącym się, że jest zbiorem o mniejszej mocy, choć wiemy, że tak nie jest. Dla nas wyjaśnienie tego sposobu rysowania będzie dość oczywiste – konieczność umieszczenia na rysunku podzbiorów $\mathbb{Q}$ skłania do przeznaczenia na liczby wymierne więcej miejsca. Uczeń natomiast, który ma mniej doświadczeń związanych z liczbami niewymiernymi, rzadziej się nimi posługiwał, a zapytany o przykłady liczb niewymiernych przeważnie potrafi wymienić $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oraz π, najprawdopodobniej uzna, że jest ich po prostu mniej niż liczb wymiernych. Uczniom nie mającym wyrobionej intuicji zbiorów nieskończonych trudno będzie myśleć o nich jako o zbiorach, które mogą być równoliczne ze swoimi podzbiorami właściwymi.

Ciekawą interpretację graficzną liczb wymiernych podają we wspomnianej już książce Bryll i Sochacki (2012). Autorzy prezentują układ współrzędnych. Oś rzędnych oznaczona jest literą N, oś odciętych literą Z. Na płaszczyźnie zaznaczone są punkty kratowe, których pierwsza współrzędna jest dowolną liczbą całkowitą, zaś druga – liczbą naturalną dodatnią. Autorzy proponują interpretować liczby wymierne o dodatnim mianowniku jako punkty węzłowe leżące ponad osią Oz. Następnie określona zostaje relacja pomiędzy punktami węzłowymi: dwa punkty, odpowiadające parom liczb $< a, m >$ oraz $< b, n >$ są ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tej samej półprostej wychodzącej z początku układu współrzędnych. W relacji będą więc te punkty, dla których $a \cdot n = b \cdot m$.

Oryginalność tego ujęcia wynika stąd, że liczby wymierne interpretuje się przeważnie jako punkty na osi liczbowej. Propozycja przedstawiona przez Brylla i Sochackiego jest reprezentacją liczb wymiernych transparentną ze względu na charakterystykę genetyczną zbioru $\mathbb{Q}$.

Graficzna reprezentacja liczb niewymiernych często wiąże się z konstrukcją odcinków o zadanych długościach niewymiernych, przy czym mam tu na myśli długości odcinków postaci $\sqrt{a}$, gdzie liczba podpierwiastkowa jest liczbą naturalną niebędącą kwadratem żadnej liczby naturalnej. W konstrukcjach wykorzystuje się często tzw. ślimak Pascala, trójkąt prostokątny wraz z twierdzeniem Pitagorasa lub twierdzenie, które ukazuje związek średniej geometrycznej z trójkątem prostokątnym.

Ciekawym problemem dydaktycznym wartym pogłębionych badań są trudności w rozumieniu przez uczniów (także studentów) liczb niewymiernych. Szczególnie interesujące wydają się zagadnienia związane z umiejscowieniem liczb wymiernych na osi liczbowej. W celu zaznaczenia np. $\sqrt{2}$ konstruuje się często kwadrat o boku długości 1, którego dwa kolejne wierzchołki umieszczone są w punktach 0 i 1 na osi. Następnie odmierza się cyrklem przekątną tego kwadratu i odkłada na osi odcinek o początku w punkcie 0 i długości równej długości tej przekątnej, wyznaczając w ten sposób położenie liczby $\sqrt{2}$ na osi liczbowej. Można je także określać z coraz większą dokładnością metodą kolejnych przybliżeń. Wiemy, że będzie to liczba leżąca na osi pomiędzy punktami 1 i 2, a dalej pomiędzy punktami $1,4$ oraz $1,5$, między $1,41$ a $1,42$ itd. Wydaje się, że jednym ze źródeł trudności, jakie doświadczają w tego typu zadaniach uczniowie, jest nieskończoność rozwinięcia dziesiętnego liczb niewymiernych. I choć liczby wymierne również posiadają rozwinięcie nieskończone (okresowe), możliwość przedstawienia ich w postaci ułamka zwykłego zdaje się redukować napięcie i poczucie niepewności związane z nieskończonością, a także z nieuświadomionym (przez ucznia) pojęciem granicy ukrytym w nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym.

10. Zakończenie

Bogactwo problematyki różnych reprezentacji liczb rzeczywistych zostało zaledwie zarysowane w tym artykule. Niektóre poruszone zagadnienia stanowią treść kursów z zakresu dydaktyki matematyki adresowanych do przyszłych nauczycieli przedmiotu. Artykuł jest zachętą do poszerzenia tych kursów o problemy mniej typowe i rzadziej poruszane, które postawią przyszłego nauczyciela w sytuacji, gdy on sam będzie odkrywał coś nowego dla siebie, pokonując przy tym pewne trudności natury poznawczej lub afektywnej. Doświadczenia takie pozwolą przyszłym nauczycielom matematyki lepiej zrozumieć trudności, z jakimi zmagają się uczniowie. Co więcej, refleksja nad trudnościami, a zwłaszcza nad tym, co okazało się skuteczne lub podczas ich pokonywania, może stanowić ważny element pedagogiczno-dydaktycznego przygotowania do zawodu nauczyciela.

11. Przykłady zadań

Zadanie 1
Zapisz w systemie dziesiątkowym następujące liczby: $123,45_6$; $0,125_8$; $21,12_3$.

Zadanie 2
Czy $0,3_4 = 0,3_5$?

Zadanie 3
Przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego następujące ułamki: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{21}{75}$.

Zadanie 4
Przedstaw podane ułamki zwykłe we wskazanych systemach liczbowych:

a) $\frac{1}{2}$ *w systemie: dwójkowym, czwórkowym, szóstkowym, ósemkowym*

b) $\frac{1}{3}$ *w systemie: trójkowym, szóstkowym, dziewiątkowym*

c) $\frac{1}{4}$ *w systemie: czwórkowym, szóstkowym, ósemkowym.*

Zadanie 5
Zapisz w postaci ułamka zwykłego następujące ułamki dziesiętne:

$$0,2 \qquad 0,24 \qquad 0,245 \qquad 0,a_1a_2...a_n$$

$$0,(2) \qquad 0,(24) \qquad 0,(245) \qquad 0,(a_1a_2...a_n).$$

Zadanie 6
Przedstaw podane ułamki zwykłe we wskazanych systemach liczbowych:

1	$\frac{1}{2}$ w systemie: trójkowym, piątkowym, siódemkowym, dziewiątkowym
2	$\frac{1}{3}$ w systemie: dwójkowym, czwórkowym, piątkowym, siódemkowym, ósemkowym
3	$\frac{1}{4}$ w systemie: dwójkowym, trójkowym, piątkowym, siódemkowym, dziewiątkowym
4	$\frac{5}{8}$ w systemie szóstkowym
5	$\frac{1}{7}$ w systemie czwórkowym
6	$\frac{1}{5}$ w systemie siódemkowym
7	$\frac{1}{b-1}$ w systemie, którego podstawą jest liczba b
8	$\frac{1}{10}$ w systemie czwórkowym

Literatura

Abian, A.: 1981, Calculus must consist of the study of real numbers in their decimal representation and not of the study of an abstract complete ordered field or nonstandard real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **12**(4), 465–472.

Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej w Krakowie, Kraków.

Błaszczyk, P.: 2010, Liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny, *Analiza i Egzystencja* **11**, 235–261.

Błaszczyk, P.: 2012, O ciałach uporządkowanych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **4**, 15–30.

Błaszczyk, P., Major, J.: 2014, Calculus without the concept of limit, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **6**, 19–40.

Białynicki-Birula, A.: 1976, *Algebra,* Vol. 40, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Borsuk, K., Szmielew, W.: 1972, *Podstawy geometrii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Bryll, G., Sochacki, R.: 2012, *Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Nowik, Opole.

Cantor, G.: 1872, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen* **5**(1), 123–132.

Chronowski, A.: 1997, *Elementy teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Chronowski, A.: 1999, *Podstawy arytmetyki szkolnej. Liczby wymierne, rzeczywiste i zespolone,* cz. 2, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Cohen, L. W., Ehrlich, G.: 1963, *The Structure of the Real Number System*, The University Series in Undergraduate Mathematics, D. Van Nostrand.

Dąbrowski, W.: 2000, *Nauka myślenia, czyli 100 lekcji matematyki. T. 1, Podstawy matematyki*, Kwantum, Warszawa.

Dedekind, R.: 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Feferman, S.: 1989, *The Number Systems: Foundations of Algebra and Analysis,* 2nd Edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island.

Goldin, G. A.: 2002, Representation in mathematical learning and problem solving, w: L. D. English (red.), *Handbook of international research in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, London, 197–218.

Goldin, G., Shteingold, N.: 2001, Systems of representations and the development of mathematical concepts, w: A. A. Cuoco, F. R. Curcio (red.), *The roles of Representation in School Mathematics*, VA: NCTM, Reston, 1–23.

Grzegorczyk, A.: 1971, *Zarys Arytmetyki Teoretycznej,* Vol. 39, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Hardy, G. H., Wright, E. M.: 1979, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press.

Hoborski, A.: 1921, *Nowa teorja liczb niewymiernych*, Nakładem Księgarni J. Czerneckiego, Warszawa-Kraków.

Janvier, C., Girardon, C., Morand, J. C.: 1993, Mathematical symbols and representations, w: P. S. Wilson (red.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York, 79–102.

Kalapodi, A.: 2010, The decimal representation of real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **41**(7), 889–900.

Kontorovich, I., Zazkis, R.: 2017, Mathematical conventions: Revisiting arbitrary and necessary, *For the Learning of Mathematics* **37**(1), 15–20.

Lesh, R., Behr, M., Post, M.: 1987a, Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving, w: C. Janvier (red.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 31–40.

Lesh, R., Behr, M., Post, M.: 1987b, Rational number relations and proportions, w: C. Janvier (red.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 41–58.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Opial, Z.: 1975, *Algebra wyższa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pape, S. J., Tchoshanov, M. A.: 2001, The role of representation(s) in developing mathematical understanding, *Theory into practice* **40**(2), 118–127.

Semadeni, Z.: 1979, *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Semadeni, Z.: 1982, Reprezentacje enaktywne i reprezentacje ikoniczne w sensie Brunera na przykładzie reprezentacji mnogościowych, *Dydaktyka Matematyki* **1**, 163–184.

Semadeni, Z., (red.): 1985, *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczycieli,* Tom 3, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Semadeni, Z., (red.): 1988, *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczycieli,* Tom 4, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Sierpiński, W.: 1964, *Elementary number theory*, Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne 46, Warszawa.

Sierpiński, W.: 1965, *Wstęp do teorii liczb,* Biblioteczka Matematyczna **25**, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Smith, S. M.: 1970, Two Unusual Representations for the Set of Real Numbers, *Mathematics Teacher* **63**(8), 665.

Słupecki, J., Piróg-Rzepecka, K., Hałkowska, K.: 1979, *Elementy arytmetyki teoretycznej,* Vol. 38, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Tarski, A.: 1994, *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych*, Filia Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku. Fundacja na Rzecz Informatyki, Logiki i Matematyki. Zakład Wydawniczy Philomath, tłum. M. Sujczyńska, Białystok.

Tarski, A., Givant, S. R.: 1987, *A formalization of set theory without variables,* Vol. 41, American Mathematical Society.

Tripathi, P. N.: 2008, Developing mathematical understanding through multiple representations, *Mathematics Teaching in the Middle School* **13**(8), 438–445.

Voskoglou, M.: 2012, Some comments on teaching the decimal representations of real numbers at school, *aaa* **37**, 99–102.

Voskoglou, M., Kosyvas, G. D.: 2012, Analyzing students' difficulties in understanding real numbers, *Journal of Research in Mathematics Education* **1**(3), 301–336.

Zazkis, R.: 2005, Representing numbers: Prime and irrational, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **36**(2–3), 207–217.

Zazkis, R.: 2016, A curious case of superscript (-1): Prospective secondary mathematics teachers explain, *The Journal of Mathematical Behavior* **43**, 98–110.

Zazkis, R., Gadowsky, K.: 2001, Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers, w: A. Cuoco (red.), *The roles of representation in school mathematics*, VA: NCTM, Reston, 146–165.

Zazkis, R., Liljedahl, P.: 2004, Understanding primes: The role of representation, *Journal for research in mathematics education* **35**(3), 164–186.

Zazkis, R., Sirotic, N.: 2010, Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link, *Research in Collegiate Mathematics Education* **7**, 1–27.

Zazkis, R., Whitkanack, D.: 1993, Non-decimals: Fractions in bases other than ten, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* **24**(1), 77–83.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail barbara.pieronkiewicz@up.krakow.pl